© mag. georg wengler

Figurierte oder geometrische Zahlen

Figuriert heißen Zahlen, die sich auf eine geometrische Figur, wie z.B. Dreiecke oder Vierecke – allgemein Polygone, daher Polygonalzahlen - aber auch Körper, wie Tetraeder, Würfel oder Oktaeder usw. – allgemein Polyeder, daher Polyederzahlen - beziehen.

Alle Folgen der figurierten Zahlen sind Reihen, sind doch die Folgeglieder immer Summen von Zahlen einer bestimmten Folge.

Zur Bestimmung der expliziten Formel der Folgen von figurierten Zahlen untersucht man die Differenzen zwischen benachbarten Folgegliedern, die selber wiederum eine Folge, die Differenzenfolge, bilden. Auch davon kann man wieder die Differenzen bestimmen usw.

Ist keine andere Möglichkeit ersichtlich, so lässt sich die explizite Gesetzmäßigkeit jeder dieser Folge mit dem sogenannten Polynomansatz algebraisch bestimmen (siehe Vorlesung).[1]

Schon die griechischen Mathematikerinnen und Mathematiker haben sich mit figurierten Zahlen beschäftigt und waren fasziniert von den dabei entdeckten Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhängen.

1 Polygonalzahlen

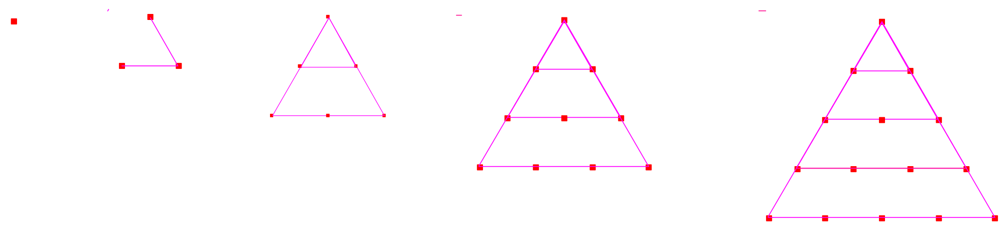
1.1 Polygonalzahlen mit dezentralem Aufbau

1.1.1. Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau "dre"

Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau sind im Prinzip die «Mutterfolge» aller figurierten Zahlen, da sich alle Polygon- und Polyederzahlen letztlich wieder auf sie zurückführen lassen.

Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau erhält man, indem man aufeinanderfolgende Natürliche Zahlen addiert. Sie heißen so, weil wir die Punkte (Steinchen, Ecken, ...) in Dreiecksform auslegen können.

$dre_1=1$ $dre_2=1+2=3$ $dre_3=1+2+3=6$ $dre_4=1+2+3+4=10$ $dre_5=1+2+3+4+5=15$



rekursive Berechnung:

Die Folgenglieder entstehen durch Addition der Natürlichen Zahlen:

[1] vgl.: http://www.phzh.ch/statisch/taxigeometrie/teil2.html

$dre_1 = 1$
$dre_2 = 1+2 = 3$
$dre_3 = 1+2+3 = 6 = dre_2 + 3$
...
$dre_n = 1+2+3+ \dots +n = dre_{(n-1)} + n$

explizite Berechnung:

Vom bedeutenden Mathematiker Karl Friedrich Gauß (1777-1855) erzählt man sich die folgende Geschichte:
Er sollte als Schüler in der Schule die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzählen. Der Lehrer nahm an, dass er damit eine Weile beschäftigt war. Schon nach kurzer Zeit fand er die Summe 5050.

Erklärung:
Statt stur die Zahlen von 1 bis 100 der Reihe nach zu addieren, bildete er Zahlenpaare mit denselben Summenwerten und konnte multiplizieren:

$$\begin{aligned} &1+2+3+4+\dots+50+51+\dots+99+100 \\ &= (1+100) + (2+99) + \dots + (50+51) \\ &= 50*101 \\ &= 5050 \end{aligned}$$

Falls die Geschichte nicht wahr ist, so ist sie gut erfunden.[2]

Damit ist auch schon die explizite Form der Berechnung der Dreickszahlen gefunden:

$$2*dre_n = \begin{matrix} 1 & + & 2\ + & & 3\ + & \dots & & + & (n-1) & + & n & + \\ +\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & \end{matrix} = n*(n+1)$$

$$dre_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Verschiedene Eigenschaften von Dreieckszahlen

Die ersten hundert Dreieckszahlen, die mit diesem Aufbau entstehen sind:

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
66	78	91	105	120	136	153	171	190	210
231	253	276	300	325	351	378	406	435	465
496	528	561	595	630	666	703	741	780	820
861	903	946	990	1035	1081	1128	1176	1225	1275
1326	1378	1431	1485	1540	1596	1653	1711	1770	1830
1891	1953	2016	2080	2145	2211	2278	2346	2415	2485
2556	2628	2701	2775	2850	2926	3003	3081	3160	3240
3321	3403	3486	3570	3655	3741	3828	3916	4005	4095
4186	4278	4371	4465	4560	4656	4753	4851	4950	5050

[2] http://www.mathematische-basteleien.de/dreieckszahlen.htm

Man sieht:

1. Auf zwei ungerade Dreieckszahlen (rot) folgen immer 2 gerade Dreieckszahlen (schwarz).

Beweis:
Annahme: Die n-te Dreieckszahl dre_n ist eine gerade Zahl
Fall 1: Man addiert eine gerade Zahl dazu $\Rightarrow$ die (n+1)-te Dreieckszahl $dre_{(n+1)}$ ist wieder eine gerade Zahl. (*)Die nächste Zahl, die nun dazugezählt wird, ist sicher eine ungerade Zahl $\Rightarrow$ die (n+2)-te Dreieckszahl $dre_{(n+2)}$ ist sicher ungerade. Zu dieser wird wieder eine gerade Zahl addiert; $dre_{(n+3)}$ ist deshalb ungerade. $dre_{(n+4)}$ ist wieder die Summe von $dre_{(n+3)}$ mit einer ungeraden Zahl und ist deshalb gerade.
Fall 2: Man addiert eine ungerade Zahl und beginnt mit der Überlegung erst bei (*)

analoge Überlegung zum Beginn mit einer ungeraden Zahl
q.e.d.

2. Die Summe der Kehrwerte aller Dreieckszahlen ist 2:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{i\cdot(i+1)}=2$$

Beweis [3]:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{i\cdot(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^2-2i^2+2}{i\cdot(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i^2}{i\cdot(i+1)}-\frac{2i^2-2}{i\cdot(i+1)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{i+1}-\frac{2(i+1)\cdot(i-1)}{i\cdot(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{i+1}-\frac{2\cdot(i-1)}{i}=$$

$$=\frac{2}{2}-\frac{0}{1}+\frac{4}{3}-\frac{2}{2}+\frac{6}{4}-\frac{4}{3}+\frac{8}{5}-\frac{6}{4}+\ldots+\frac{2(n-1)}{n}-\frac{2(n-2)}{n-1}+\frac{2n}{n+1}-\frac{2\cdot(n-1)}{n}$$

Es bleibt nur $\frac{2n}{n+1}$ übrig.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$$
q.e.d.

3. Bei allen Dreieckszahlen > 3 handelt es sich um zusammengesetzte Zahlen.
Zusammengesetzte Zahlen sind natürliche Zahlen, die sich als Produkt darstellen lassen, die also keine Primzahlen sind. [4]

Dass die Dreieckszahlen > 3 keine Primzahlen, sind folgt aus der expliziten Formel:

$$dre_n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

[3] vgl.: http://zahlwort.blogger.de/stories/267742
[4] vgl.: http://de.wikipedia.org/wiki/Zusammengesetzte_Zahl

Ist n gerade, dann ist $\frac{n}{2}$ eine natürliche Zahl und dre_n somit als Produkt zweier natürlicher Zahlen darstellbar.
Ist n ungerade, dann ist $\frac{n+1}{2}$ ganzzahlig und damit dre_n wieder das Produkt zweier natürlicher Zahlen.
q.e.d.

4. Zusammenhang der Dreieckszahlen (mit zentralem Aufbau) mit Vollkommenen Zahlen
Eine Zahl, deren Summe ihrer Teiler (kleiner als die Zahl selbst) gleich der Zahl ist, heißt vollkommene Zahl. Die ersten vollkommenen Zahlen sind 6, 28 und 496. Sie sind Dreieckszahlen wie **jede** vollkommene gerade Zahl (Es ist bis heute unbekannt, ob es auch ungerade vollkommene Zahlen gibt).[5]

Beweis:
Nach Leonhard Euler lässt sich eine gerade vollkommene Zahl durch die Formel
$(2^n - 1)\cdot 2^{n-1}$ darstellen, wobei
$(2^n - 1)$ eine Primzahl sein muss. Wenn man die Formel
$(2^n - 1)\cdot 2^{n-1}$ mit 2 multiplikativ erweitert, und 2^n durch m substituiert, kommt man auf die Formel, die Dreieckszahlen repräsentiert:

$$(2^n - 1)\cdot 2^{n-1} = \frac{(2^n - 1)\cdot 2^{n-1}\cdot 2}{2} = \frac{(2^n - 1)\cdot 2^n}{2} \Rightarrow \frac{(m-1)\cdot m}{2}$$

q.e.d. [6]

5. Zusammenhang der Dreieckszahlen (mit zentralem Aufbau)mit dem Pascal`schen Dreieck

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Die Lage im Pascal'schen Dreieck:
Wie so oft in der Zahlentheorie bietet auch hier das Pascal'sche Dreieck einen Beitrag.
Die rot gekennzeichneten Zahlen sind Dreieckszahlen.
Man kann im Dreieck auch die Summe der Dreieckszahlen ablesen und erhält damit die Tetraederzahlen.

Beispiel: 1+3+6+10+15=35

Damit lassen sich Dreieckszahlen und Tetraederzahlen (siehe Kapitel 2.1.) auch als Binomialkoeffizienten darstellen.[7]

[5] vgl.: http://de.wikipedia.org/wiki/Vollkommene_Zahl#Berechnung_von_vollkommenen_Zahlen
[6] vgl.: http://de.wikipedia.org/wiki/Dreieckszahl
[7] vgl.: http://www.mathematische-basteleien.de/dreieckszahlen.htm

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ findet man im Pascal'schen Dreieck in der (n+1)-ten Reihe an der (k+1)-ten Stelle.

Daher kann man die Dreickszahlen auch wie folgt schreiben:

$$\langle dre \rangle = \binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \ldots$$

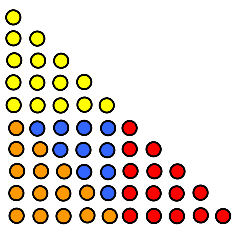
6. Die Summe zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen ergibt eine Quadratzahl:
siehe Kapitel 1.1.1.2 Die Doppeltreppe

7. Die Differenz der Quadrate zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen ergibt eine Kubikzahl.[8]
Dies lässt sich aus der darüber stehenden Eigenschaft ableiten. Wenn das Quadrat der n-ten Dreieckszahl aus der Summe der ersten n Kubikzahlen gebildet wird, und das Quadrat der (n+1)-ten Dreieckszahl aus der Summe der ersten n+1 Kubikzahlen gebildet wird, muss als Differenz die (n+1)-te Kubikzahl herauskommen.

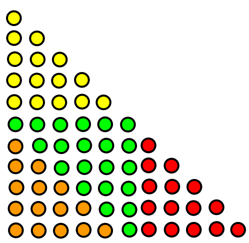
8. Das Achtfache einer Dreieckszahl addiert mit 1 ergibt immer eine Quadratzahl[9]

Diese Aussage ist gleichbedeutend mit:
Alle ungeraden Quadratzahlen sind kongruent 1 mod 8.

9. $3 \cdot dre_n + dre_{(n-1)} = dre_{2n}$



10. $3 \cdot dre_n + dre_{(n+1)} = dre_{(2n+1)}$



[8] vgl. ebenda
[9] vgl. ebenda

11. Jede Natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens drei Dreieckszahlen ausdrücken[10]

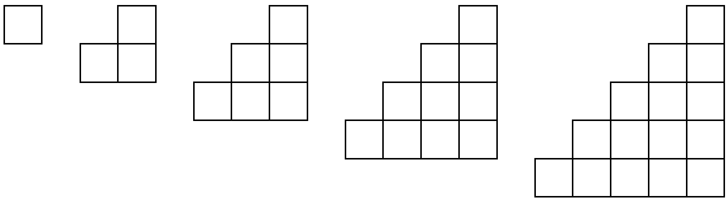
Diese Entdeckung stammt von Carl Friedrich Gauß. Seine vielleicht berühmteste Tagebucheintragung machte er am 10. Juli 1796. Sie lautete:

EYPHKA: num = $\Delta + \Delta + \Delta$

(Heureka! Jede Zahl ist die Summe von 3 Dreieckszahlen)
Allgemeiner (Fermat):
Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von höchstens n n-Eckzahlen darstellen.

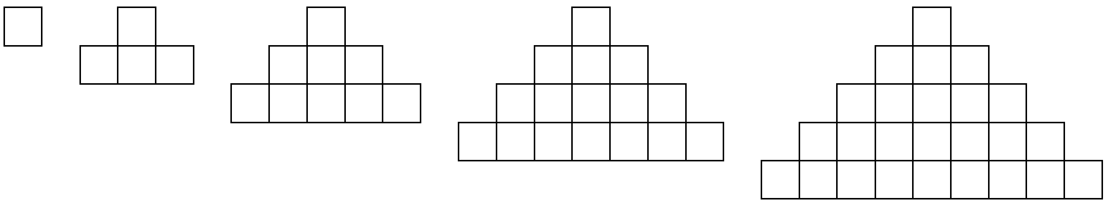
1.1.1.1 Die Treppe

Zeichnet man den dezentralen Aufbau von Dreieckszahlen etwas verändert auf, so lässt sich das Bild einer Treppe erkennen:



1.1.1.2 Die Doppeltreppe

Ebenso lassen sich natürlich Doppeltreppen aufbauen:



rekursive Berechnung:

Mathematisch gesehen handelt es sich hier um eine Addition der ungeraden Zahlen:

$dotr_1 =$	$1 =$	1
$dotr_2 =$	$1+3 =$	4
$dotr_3 =$	$1+3+5 =$	9
$dotr_4 =$	$1+3+5+7 =$	16
$dotr_n =$	$1+3+5+7+ \dots +(2n-1) = dotr_{(n-1)}+(2n-1)$	

...

explizite Berechnung:

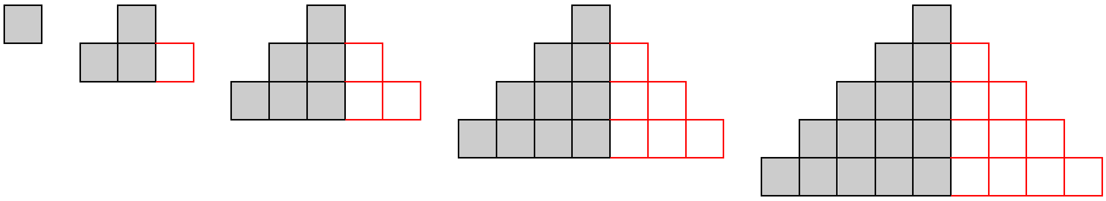
Vermutung:
$1+3+5+ \dots +(2n-1) = n^2$

Beweis:

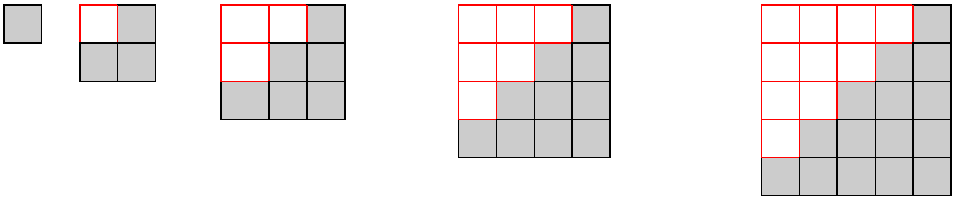
---

[10] vgl. ebenda

Prinzipiell lassen sich Doppeltreppen als zwei Treppen deuten, wobei die eine eine Stufe weniger hat als die andere:



Diese Treppen lassen sich auch wie folgend anordnen, womit gleichzeitig die Vermutung bewiesen ist:



Bei den Doppeltreppenzahlen handelt es sich folglich um die Quadratzahlen mit dezentralem Aufbau. Diese werden deshalb in den weiteren Ausführungen mit “qua“ bezeichnet

Ebenso kommt man natürlich durch Umformung der Summe der aufeinander folgenden Dreieckszahlen auf n^2:

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2}+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{n\cdot(n-1+n+1)}{2}=\frac{n\cdot 2n}{2}=n^2$$

1.1.2. Quadratzahlen mit dezentralem Aufbau “qua“

1 1+3=4 1+3+5=9 1+3+5+7=16 1+3+5+7+9=25

Quadratzahlen ergeben sich durch die Addition der ungeraden Zahlen

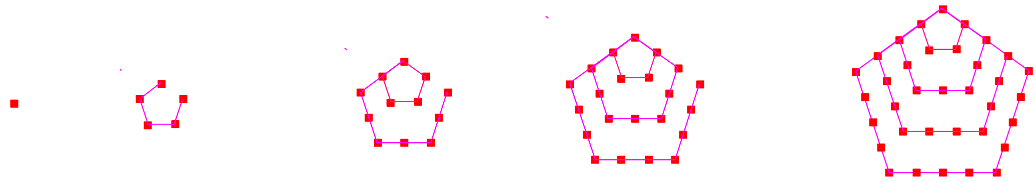
Sie können auf Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau zurückgeführt werden und wurden daher bereits im Kapitel Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau: Die Doppeltreppe behandelt.

rekursives Bildungsgesetz: $qua_n = qua_{(n-1)} + (2n-1) = qua_{(n-1)} + (n-1)\cdot 2 + 1$

explizites Bildungsgesetz: $qua_n = n^2$

1.1.3. Pentagonalzahlen mit dezentralem Aufbau "pen"

1 1+4=5 1+4+7=12 1+4+7+10=22 1+4+7+10+13=35



rekursives Bildungsgesetz:

$1 = pen_1$

$5 = pen_2 = pen_1 + 4 = pen_1 + 1 \cdot 3 + 1$

$12 = pen_3 = pen_2 + 7 = pen_2 + 2 \cdot 3 + 1$

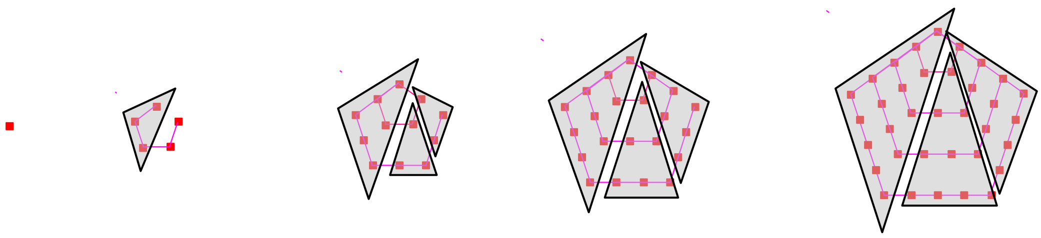
$22 = pen_4 = pen_3 + 10 = pen_3 + 3 \cdot 3 + 1$

...

$$pen_n = pen_{(n-1)} + (n-1) \cdot 3 + 1$$

explizites Bildungsgesetz:

Auch diese Zahlen können auf Dreieckszahlen zurückgeführt werden.



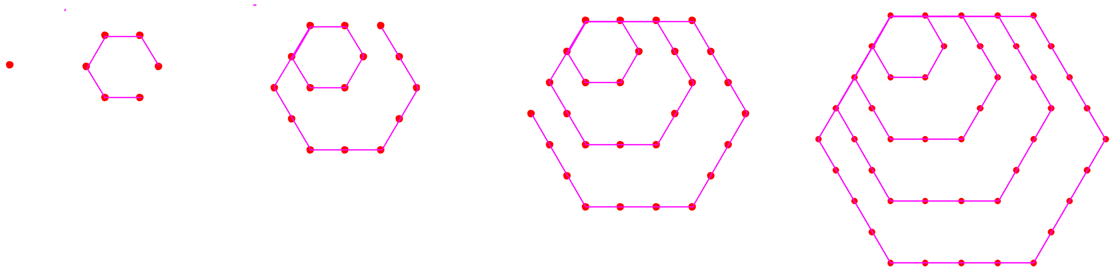
Wie man unschwer erkennen kann gilt:

$pen_n = dre_n + 2 * dre_{(n-1)}$ oder $pen_n = qua_n + dre_{(n-1)} \Rightarrow$

$$pen_n = dre_n + 2 \cdot dre_{(n-1)} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 + n + 2n^2 - 2n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n \cdot (3n-1)}{2}$$

1.1.4. Hexagonalzahlen mit dezentralem Aufbau "hex"

1 1+5=6 1+5+9=15 1+5+9+13=28 1+5+9+13+17=45



© mag. georg wengler

rekursives Bildungsgesetz:

$1 = hex_1$

$6 = hex_2 = hex_1 + 5 = hex_1 + 1 \cdot 4 + 1$

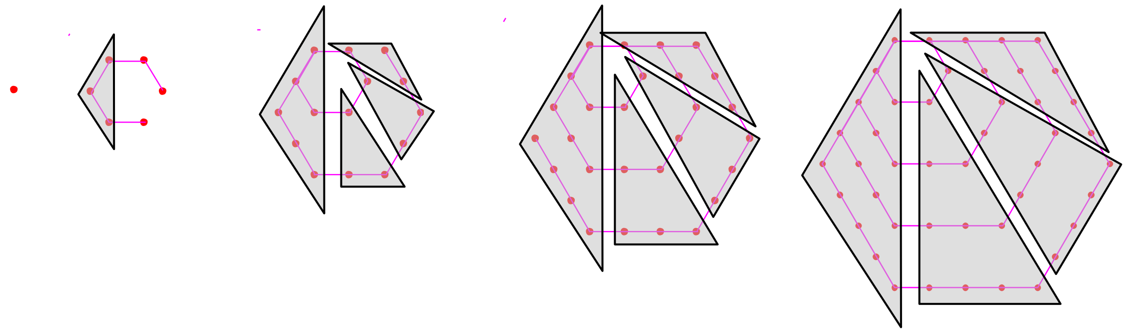
$15 = hex_3 = hex_2 + 9 = hex_2 + 2 \cdot 4 + 1$

$28 = hex_4 = hex_3 + 13 = hex_3 + 3 \cdot 4 + 1$

...

$$hex_n = hex_{(n-1)} + (n-1) \cdot 4 + 1$$

explizites Bildungsgesetz:



Bei der Rückführung auf die Dreieckszahlen erkennt man:

$$hex_n = dre_n + 3 \cdot dre_{(n-1)} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 3 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 + n + 3n^2 - 3n}{2} = \frac{4n^2 - 2n}{2} = \frac{2n \cdot (2n-1)}{2} = n \cdot (2n-1)$$

Eigenschaften:

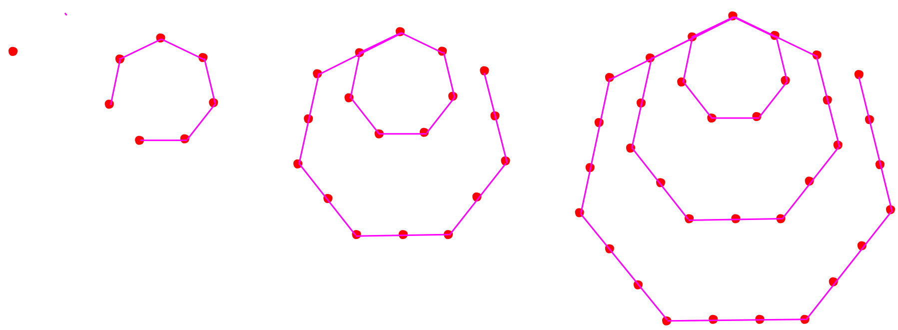
Wie man aus der Tabelle in Kapitel 1.1.1 erkennen kann, sind alle Hexagonalzahlen auch Dreieckszahlen und zwar jeweils die 1., 3., 5., ...

d.h.: die (2n-1)-te Dreieckszahl ist die n-te Hexagonalzahl:

$$\frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = n \cdot (2n-1) \qquad \text{w.A.!}$$

1.1.5. Heptagonalzahlen mit dezentralem Aufbau “hep“

1   1+6=7   1+6+11=18   1+6+11+16=34



rekursives Bildungsgesetz:

$1 = hep_1$

$7 = hep_2 = hep_1 + 6 = hep_1 + 1 \cdot 5 + 1$

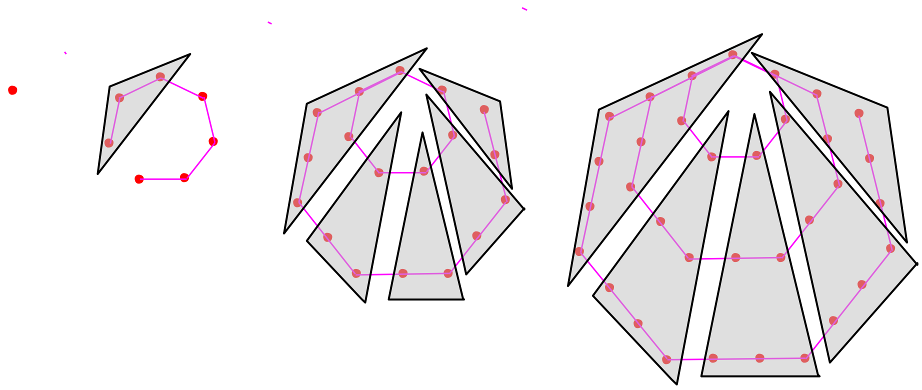
$18 = hep_3 = hep_2 + 11 = hep_2 + 2 \cdot 5 + 1$

$34 = hep_4 = hep_3 + 16 = hep_3 + 3 \cdot 5 + 1$

...

$$hep_n = hep_{(n-1)} + (n-1) \cdot 5 + 1$$

explizites Bildungsgesetz:



Bei der Rückführung auf die Dreieckszahlen erkennt man:

$$hep_n = dre_n + 4 \cdot dre_{(n-1)} = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 4 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 + n + 4n^2 - 4n}{2} = \frac{5n^2 - 3n}{2} = \frac{n \cdot (5n-3)}{2}$$

 © mag. georg wengler

1.1.6. Allgemeines Formulieren von Polygonalzahlen mit dezentralem Aufbau:

Nummer Figur	1	2	3	4	5	n rekursive Formeln	
Dreieck (Addition von ℕ)	1	3	6	10	15	$dre_n = dre_{(n-1)} + n =$ $dre_{(n-1)} + (n-1)\cdot 1 + 1$	
Quadrat Addition der unger. Zahlen	1	4	9	16	25	$qua_n = qua_{(n-1)} + (n-1)\cdot 2 + 1$	$qua_n = dre_n + dre_{(n-1)} = dre_n + 1\cdot dre_{(n-1)}$
Pentagon	1	5	12	22	35	$pen_n = pen_{(n-1)} + (n-1)\cdot 3 + 1$	$pen_n = qua_n + dre_{(n-1)} = dre_n + 2\cdot dre_{(n-1)}$
Hexagon	1	6	15	28	45	$hex_n = hex_{(n-1)} + (n-1)\cdot 4 + 1$	$hex_n = pen_n + dre_{(n-1)} = dre_n + 3\cdot dre_{(n-1)}$
Heptagon	1	7	18	34	55	$hep_n = hep_{(n-1)} + (n-1)\cdot 5 + 1$	$hep_n = hex_n + dre_{(n-1)} = dre_n + 4\cdot dre_{(n-1)}$
p-eck	1	p				$p-eck_n = p-eck_{(n-1)} + (n-1)\cdot(p-2) + 1$	$p-eck_n = (p-1)-eck_n + dre_{(n-1)} = dre_n + (p-3)\cdot dre_{(n-1)}$

Nummer Figur	n explizite Formeln	
Dreieck (Addition von ℕ)	$dre_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{n\cdot(n-(-1))}{2}$	$dre_n = n + \frac{(n-1)\cdot n}{2}$ (Herleitung siehe nächste Seite)
Quadrat Addition der unger. Zahlen	$qua_n = n^2 = \frac{n\cdot(2n-0)}{2}$	$qua_n = n + 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$
Pentagon	$pen_n = \frac{n\cdot(3n-1)}{2}$	$pen_n = n + 3\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$
Hexagon	$hex_n = \frac{n\cdot(4n-2)}{2}$	$hex_n = n + 4\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$
Heptagon	$hep_n = \frac{n\cdot(5n-3)}{2}$	$hep_n = n + 5\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$
p-eck	$p-eck_n = \frac{n\cdot((p-2)n-(p-4))}{2}$	$p-eck_n = n + (p-2)\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$

© mag. georg wengler

Explizites Bildungsgesetz der Polygonalzahlen mit dezentralem Aufbau über die Dreieckszahlen:

$$dre_n = n + dre_{(n-1)} = n + \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$qua_n = dre_n + 1\cdot dre_{(n-1)} = n + 2\cdot dre_{(n-1)} = n + 2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$pen_n = dre_n + 2\cdot dre_{(n-1)} = n + 3\cdot dre_{(n-1)} = n + 3\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$hex_n = dre_n + 3\cdot dre_{(n-1)} = n + 4\cdot dre_{(n-1)} = n + 4\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$hep_n = dre_n + 4\cdot dre_{(n-1)} = n + 5\cdot dre_{(n-1)} = n + 5\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$p-eck_n = n + (p-2)\cdot dre_{(n-1)} = n + (p-2)\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

Beweis für die Gleichheit der Formel für ein p-eck:

$$\frac{n\cdot((p-2)n-(p-4))}{2} = \frac{n\cdot(np-2n-p+4)}{2} = \frac{pn^2-2n^2-pn+4n}{2} =$$

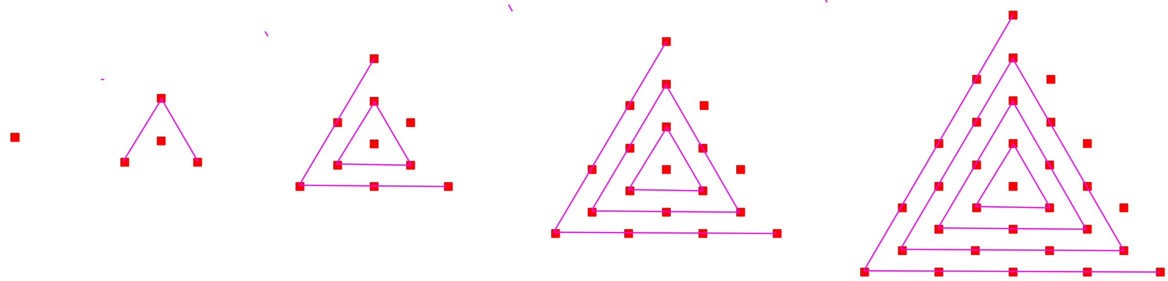
$$= \frac{2n+pn^2-2n^2-pn+4n}{2} = \frac{2n+(p-n)(n^2-n)}{2} = n+(p-2)\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

© mag. georg wengler

1.2 Zentrierte Polygonalzahlen

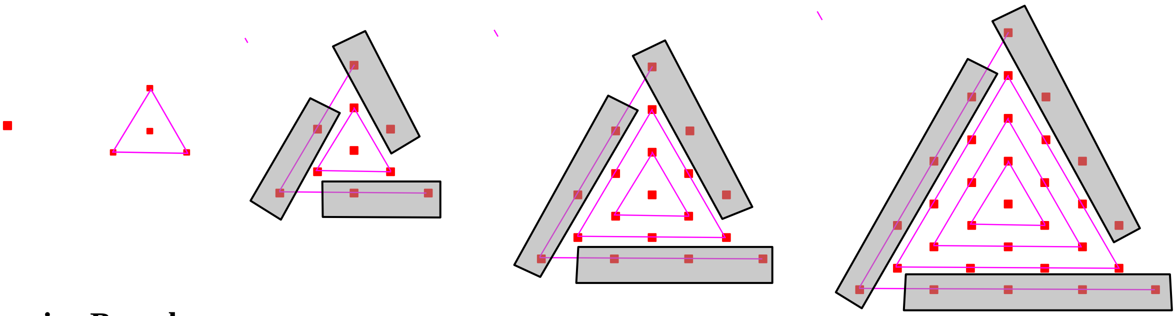
1.2.1. Zentrierte Dreieckszahlen “drez“

$drez_1=1$ $drez_2=1+3=4$ $drez_3=1+3+6=10$ $drez_4=1+3+6+9=19$ $drez_5=1+3+6+9+12=31$



Wie man sieht, werden hier jeweils die Vielfachen von 3 zur ursprünglichen 1 addiert.
Auch das kann man sehr schön bildlich darstellen:

$drez_1=1$ $drez_2=1+3*1$ $drez_3=1+3*1+3*$ $drez_4=1+3*1+3*2+3*3$ $drez_5=1+3*1+3*2+3*3+3*4$



rekursive Berechnung:
Für die n-te Dreieckszahl $drez_n$ gilt deshalb:

$$drez_n = 1+3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+3\cdot(n-1) = drez_{(n-1)} + 3\cdot(n-1)$$

explizite Berechnung:

$$drez_n = 1+3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+\ldots+3\cdot(n-1) =$$

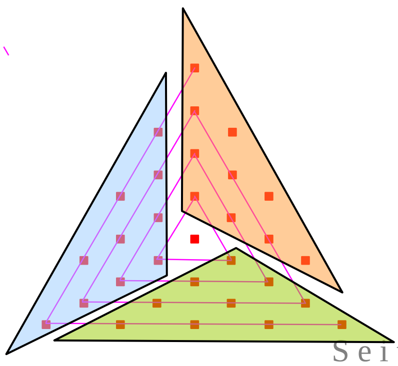
$$= 1+3\cdot(1+2+3+\ldots+n) = 1+3\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$= \frac{3n^2-3n+2}{2} = 3\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1$$

Man sieht: Die Dreieckszahlen lassen sich auch mittels Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau berechnen:

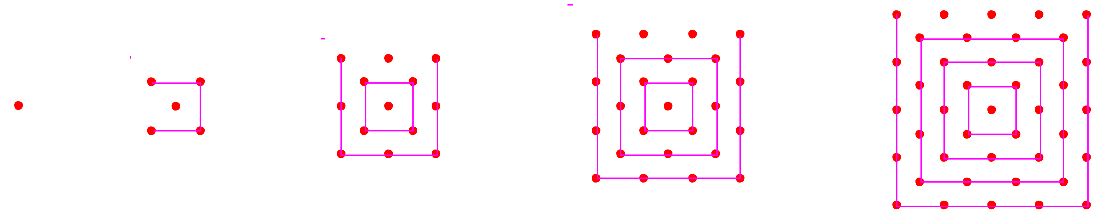
$$drez_n = 3\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1 = 3\cdot dre_{(n-1)}+1$$

Eigenschaft:
Die zentrierten Dreieckszahlen sind kongruent 1 mod 3



1.2.2. Zentrierte Quadratzahlen “quaz“

$quaz_1=1$ $quaz_2=1+4=5$ $quaz_3=1+4+8=13$ $quaz_4=1+4+8+12=25$ $quaz_5=1+4+8+12+16=41$



Analog zum zentralen Aufbau von Dreieckszahlen können Gruppen gebildet werden, sodass für die n-te Quadratzahl $quaz_n$ gilt:

$$quaz_n = 1+1\cdot 4+2\cdot 4+3\cdot 4+...+(n-1)\cdot 4$$

rekursive Berechnung:
Für die n-te Quadratzahl $quaz_n$ gilt deshalb:

$$quaz_n = 1+4\cdot 1+4\cdot 2+4\cdot 3+\ldots+4\cdot(n-1) = quaz_{(n-1)}+4\cdot(n-1)$$

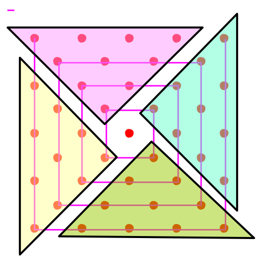
explizite Berechnung:

$$quaz_n = 1+1\cdot 4+2\cdot 4+3\cdot 4+...+(n-1)\cdot 4 =$$

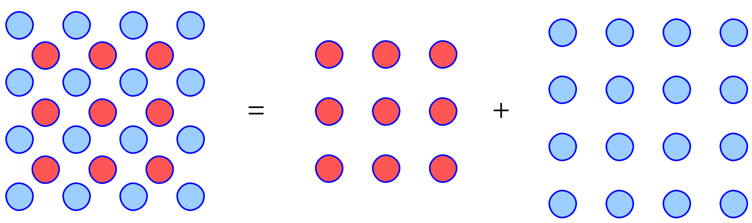
$$= 1+4(1+2+3+\ldots+(n-1)) = \frac{2+4(n-1)n}{2} =$$

$$= \frac{4n^2-4n+2}{2} = 4\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1 = 2\cdot n\cdot(n-1)+1$$

Eigenschaften[11]:
Die Quadratzahlen mit zentralem Aufbau sind kongruent 1 mod 4



Die zentrierten Quadratzahlen sind die Summe zweier aufeinanderfolgender Quadrate, von denen eines ungerade und eines gerade ist.



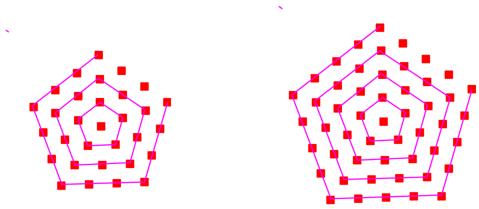
$$quaz_n = 2n\cdot(n-1)+1 = 2n^2-2n+1 = n^2+(n^2-2n+1) = n^2+(n-1)^2$$

[11] vgl.: Conway .H. u. Guy R., Zahlenzauber. Von natürlichen und imaginären und anderen Zahlen, Basel-Boston-Berlin 1997, S. 51

© mag. georg wengler

1.2.3. Zentrierte Pentagonalzahlen "penz"

$penz_1=1$ $penz_2=1+5=6$ $penz_3=1+5+10=16$ $penz_4=1+5+10+15=31$ $penz_5=1+5+10+115+20=51$



rekursive Berechnung:

Analog zu den Dreiecks- und Quadratzahlen mit zentralem Aufbau gilt für die n-te Pentagonalzahl $penz_n$:

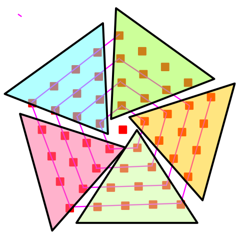
$$penz_n = 1+5\cdot 1+5\cdot 2+5\cdot 3+\ldots+5\cdot(n-1) = penz_{(n-1)} + 5\cdot(n-1)$$

explizite Berechnung:
Analog zum zentralen Aufbau von Dreieckszahlen können wieder Gruppen gebildet werden, sodass für die n-te Pentagonalzahl $penz_n$ gilt:

$$penz_n = 1+1\cdot 5+2\cdot 5+3\cdot 5+...+(n-1).5 =$$

$$= 1+5(1+2+3+\ldots+(n-1)) = \frac{2+5(n-1)n}{2} = \frac{5n^2-5n+2}{2} = 5\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1$$

Eigenschaft:
Die Pentagonalzahlen mit zentralem Aufbau sind kongruent 1 mod 5



1.2.4. Zentrierte Hexagonalzahlen "hexz"[12]

$$\langle hexz\rangle = 1,7,19,37,61,...$$

rekursive Berechnung (analoge Herleitung):

$$hexz_n = 1+6\cdot 1+6\cdot 2+6\cdot 3+\ldots+6\cdot(n-1) = hexz_{(n-1)} + 6\cdot(n-1)$$

explizite Berechnung (analoge Herleitung):

$$hexz_n = 1+6(1+2+3+\ldots+(n-1)) = \frac{2+6(n-1)n}{2} = \boxed{6\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1} = 3\cdot n\cdot(n-1)+1$$

Hexagonalzahlen mit zentralem Aufbau sind kongruent 1 mod 6

[12] vgl.: ebenda S. 50f.

 © mag. georg wengler

1.2.5. Allgemeines Formulieren von zentrierten Polygonalzahlen

Nummer Figur	1	2	3	4	5	n rekursive Formeln			n explizite Formel
Dreieck	1	4	10	19	31	$drez_n = 3 \cdot drez_{(n-1)} + 1$		$drez_n = drez_{(n-1)} + 3 \cdot (n-1)$	$drez_n = 3 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + 1$
Quadrat	1	5	13	25	41	$quaz_n = 4 \cdot drez_{(n-1)} + 1$	$quaz_n = drez_n + drez_{(n-1)}$	$quaz_n = quaz_{(n-1)} + 4 \cdot (n-1)$	$quaz_n = 4 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + 1$
Pentagon	1	6	16	31	51	$penz_n = 5 \cdot drez_{(n-1)} + 1$	$penz_n = quaz_n + drez_{(n-1)}$	$penz_n = penz_{(n-1)} + 5 \cdot (n-1)$	$penz_n = 5 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + 1$
Hexagon	1	7	19	37	61	$hexz_n = 6 \cdot drez_{(n-1)} + 1$	$hexz_n = penz_n + drez_{(n-1)}$	$hexz_n = hexz_{(n-1)} + 6 \cdot (n-1)$	$hexz_n = 6 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + 1$
p-eck	1	p+1	p+2p+1	p+2p+3p+1	...	$p-eckz_n = p \cdot drez_{(n-1)} + 1$	$p-eckz_n =$ $(p-1)-eckz_n + drez_{(n-1)}$ (siehe dezentrierte Variante)	$p-eckz_n = p-eckz_{(n-1)} + p \cdot (n-1)$	$p-eckz_n = p \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + 1$

Da $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = dre_{(n-1)}$ können alle Polygonalzahlen mit zentralem Aufbau auch als ein Vielfaches von Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau plus 1 gesehen werden, bzw.:

Polygonalzahlen mit zentralem Aufbau und p Ecken sind kongruent 1 mod p.

 © mag. georg wengler

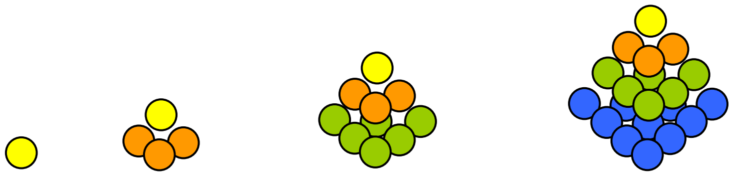
2 Polyederzahlen

Figurierte Zahlen gibt es natürlich auch im mehrdimensionalen Raum. Auch im $\mathbb{R}^3$ lassen sie sich schön darstellen.

2.1 Pyramidalzahlen, die durch Übereinanderschichten von Polygonalzahlen mit dezentralem Aufbau entstehen:

2.1.1. Tetraederzahlen "tet" [13]

Tetraederzahlen entstehen durch ein Übereinanderschichten von Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau.



$tet_1=1$ $tet_2=1+3=4$ $tet_3=1+3+6=10$ $tet_4=1+3+6+10=20$

rekursive Berechnung:

Die Folgenglieder entstehen durch Addition der Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau:

$tet_n = dre_1 + dre_2 + dre_3 + ... + dre_n$
$tet_n = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + ... + (1 + 2 + 3 + ... + n)$

$$tet_n = tet_{(n-1)} + dre_n = tet_{(n-1)} + \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

explizite Berechnung:

Durch den Zusammenhang mit dem Pascal'schen Dreieck lässt sich eine Formel für die explizite Berechnung finden:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ findet man im Pascal'schen Dreieck in der (n+1)-ten Reihe an der (k+1)-ten Stelle.

Damit kann man die Tetraederzahlen auch wie folgt schreiben:

$$\langle tet\rangle = \binom{3}{3},\binom{4}{3},\binom{5}{3},\binom{6}{3},\dots,\binom{n+2}{3}$$

daher gilt:

$$tet_n = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

[13] vgl.: ebenda S. 53f.

2.1.2. Quadratische Pyramidalzahlen “4-pyr“ [14]

rekursive Berechnung:

$4\text{-pyr}_n = 1^2+2^2+3^2+\ldots +n^2$
$4\text{-pyr}_n = 4\text{-pyr}_{(n-1)} +n^2$

explizite Berechnung:

In Kapitel 1.1.1.2 wurde gezeigt, dass die Summe von aufeinander folgenden Dreieckszahlen mit dezentralem Aufbau eine Quadratzahl ergeben.

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2}+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{n\cdot(n-1+n+1)}{2}=\frac{n\cdot 2n}{2}=n^2$$

Mit dem Wissen über den Aufbau der Tetraederzahlen durch Übereinanderschichten von Dreieckszahlen gilt daher :

$$4-pyr_n=tet_n+tet_{(n-1)}=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+\frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=$$
$$=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(n+2+n-1)=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

2.1.3. Pentagonale Pyramidalzahlen “5-pyr“

rekursive Berechnung:

$$5-pyr_n=1+5+12+22+35+\ldots+\frac{n\cdot(3n-1)}{2}$$
$$5-pyr_n=5-pyr_{(n-1)}+\frac{n\cdot(3n-1)}{2}$$

explizite Berechnung:

Da sich die dezentralen Pentagonalzahlen aber auch durch die Dreieckszahlen darstellen lassen, (siehe Kapitel 1.1.3) lassen sich die dezentralen Pyramidalzahlen auch in Tetraederzahlen teilen. Daher gilt:

$$5-pyr_n=tet_n+2\cdot tet_{(n-1)}=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+\frac{2}{6}(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=$$
$$=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(n+2+2n-2)=\frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot 3n$$

[14] vgl.: ebenda S. 56f.

© mag. georg wengler

2.1.4. Allgemeines Formulieren von Pyramidalzahlen, die durch Übereinanderschichten von Polygonalzahlen mit dezentralem Aufbau entstehen:

Nummer Figur	1	2	3	4	n rekursive Formeln		n explizite Formel
Tetraeder	1	4	10	20	$tet_n = tet_{(n-1)} + dre_n$		$tet_n = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$
quadratische Pyramide	1	5	14	30	$4-pyr_n = 4-pyr_{(n-1)} + qua_n$	$4-pyr_n = tet_n + 1 \cdot tet_{(n-1)}$	$4-pyr_n = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$
pentagonale Pyramide	1	6	18	40	$5-pyr_n = 5-pyr_{(n-1)} + pen_n$	$5-pyr_n = tet_n + 2 \cdot tet_{(n-1)}$	$5-pyr_n = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot 3n$
hexagonale Pyramide	1	7	22	50	$6-pyr_n = 6-pyr_{(n-1)} + hex_n$	$6-pyr_n = tet_n + 3 \cdot tet_{(n-1)}$	$6-pyr_n = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (4n-1)$
p-eckige Pyramide	1	p+1	4p-2	(p-1)*10	$p-pyr_n = p-pyr_{(n-1)} + p-eck_n$	$p-pyr_n = tet_n + (p-3) \cdot tet_{(n-1)}$	$p-pyr_n = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot ((p-2)n + 5 - p)$

2.2 Pyramidalzahlen, die durch Übereinanderschichten von Polygonalzahlen mit zentralem Aufbau entstehen:

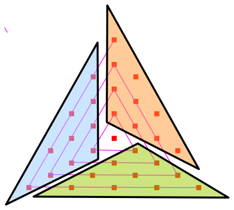
2.2.1. Dreiseitige Pyramidalzahlen "3-pyrz"

Durch ein Übereinanderschichten der zentrierten Dreieckszahlen erhält man dreiseitige Pyramiden.

rekursive Berechnung:

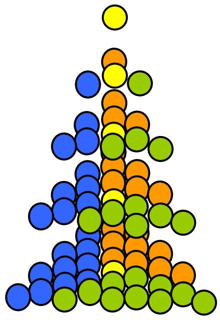
$3-pyrz_n = 3-pyrz_{(n-1)} + drez_n$

Da sich aber die zentralen Dreieckszahlen in dezentrale Dreieckszahlen plus 1 teilen lassen,



$drez_n = 3 \cdot dre_{(n-1)} + 1$

lassen sich analog die zentrierten Pyramidalzahlen in 3 Tetraederzahlen plus n teilen.



$3-pyrz_n = 3 \cdot tet_{(n-1)} + n$

explizite Berechnung:

$$3-pyrz_n = 3 \cdot tet_{(n-1)} + n = tet_n = 3 \cdot \frac{1}{6}(n-1) \cdot n \cdot (n+1) + n =$$

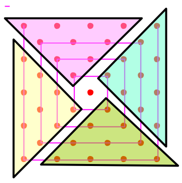
$$= \frac{1}{2}(n^2 - 1) \cdot n + n$$

2.2.2. Quadratische Pyramidalzahlen "4-pyrz"

rekursive Berechnung:

$4-pyrz_n = 4-pyrz_{(n-1)} + quaz_n$

oder analog zu 3-pyrz:



Weil $quaz_n = 4 \cdot dre_{(n-1)} + 1$ gilt auch $4-pyrz_n = 4 \cdot tet_{(n-1)} + n$

explizite Berechnung:

$$4-pyrz_n = 4\cdot tet_{(n-1)} + n = tet_n = 4\cdot\frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n =$$

$$=\frac{2}{3}(n^2-1)\cdot n+n$$

2.2.3. Pentagonale Pyramidalzahlen “5-pyrz“

rekursive Berechnung:

$5-pyrz_n = 5-pyrz_{(n-1)} + penz_n$

oder analog zu 3-pyrz:

$5-pyrz_n = 5\cdot tet_{(n-1)} + n$

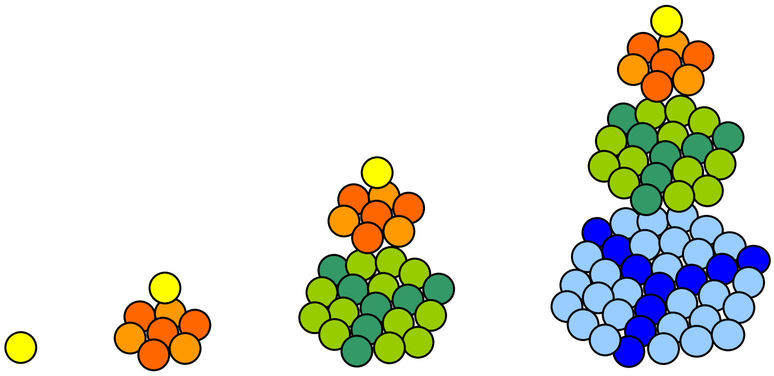
explizite Berechnung:

$$5-pyrz_n = 5\cdot tet_{(n-1)} + n = tet_n = 5\cdot\frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n =$$

$$=\frac{5}{6}(n^2-1)\cdot n+n$$

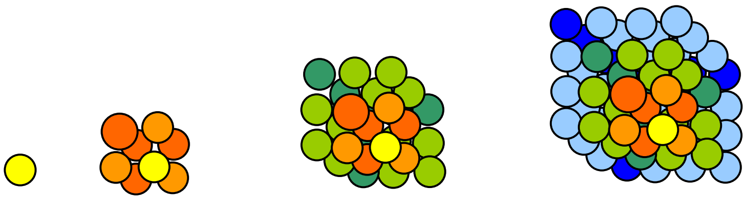
2.2.4. Hexpyramidalzahlen – Kubikzahlen “kub“ [15]

Hexpyramidalzahlen sind Pyramidalzahlen bei denen Hexagone mit zentralem Aufbau übereinander geschichtet werden. Hier soll gezeigt werden, dass sie gleich groß sind wie die entsprechenden Kubikzahlen mit dezentralem Aufbau.



$6\text{-pyr}_1=1$ $6\text{-pyr}_2=1+7=8$ $6\text{-pyr}_3=1+7+19=27$ $6\text{-pyr}_4=1+7+19+37=64$

Baut man die Sechsecke mit den dunklen Punkten als Achsen im Raum auf, so entsteht jeweils ein „Nest“ in dem die zuvor erhaltenen „Nester“ wieder Platz hat.



$\text{kub}_1=1$ $\text{kub}_2=1+7=8$ $\text{kub}_3=1+7+19=27$ $\text{kub}_4=1+7+19+37=64$

Man sieht: Die Hexpyramidalzahlen entsprechen den Kubikzahlen: $6-pyr_n = kub_n = n^3$

[15] vgl. ebenda S. 52f.

 © mag. georg wengler

2.2.5. Allgemeines Formulieren von Pyramidalzahlen, die durch Übereinanderschichten von Polygonalzahlen mit zentralem Aufbau entstehen:

Nummer Figur	1	2	3	4	n rekursive Formeln		n explizite Formel
dreiseitige Pyramide	1	5	15	34	$3-pyrz_n = 3-pyrz_{(n-1)} + drez_n$	$3-pyrz_n = 3\cdot tet_{(n-1)} + n$	$3-pyrz_n = \frac{3}{6}(n^2-1)\cdot n + n$
quadratische Pyramide	1	6	19	44	$4-pyrz_n = 4-pyrz_{(n-1)} + quaz_n$	$4-pyrz_n = 4\cdot tet_{(n-1)} + n$	$4-pyrz_n = \frac{4}{6}(n^2-1)\cdot n + n$
pentagonale Pyramide	1	7	23	54	$5-pyrz_n = 5-pyrz_{(n-1)} + penz_n$	$5-pyrz_n = 5\cdot tet_{(n-1)} + n$	$5-pyrz_n = \frac{5}{6}(n^2-1)\cdot n + n$
hexagonale Pyramide	1	8	27	64	$kub_n = kub_{(n-1)} + hexz_n$	$kub_n = 6\cdot tet_{(n-1)} + n$	$kub_n = \frac{6}{6}(n^2-1)\cdot n + n = n^3$
p-eckige Pyramide	1	p+2	4p+3	10p+4	$p-pyrz_n = p-pyrz_{(n-1)} + p-eckz_n$	$p-pyrz_n = p\cdot tet_{(n-1)} + n$	$p-pyrz_n = \frac{p}{6}(n^2-1)\cdot n + n$

© mag. georg wengler

2.3 *Weitere Polyederzahlen*

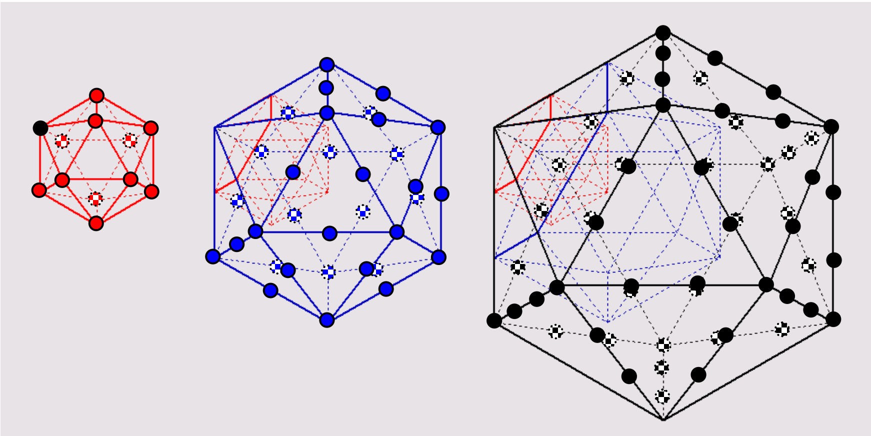
2.3.1. Oktaederzahlen “oct“ [16]

Oktaederzahlen können auch als doppelte quadratische Pyramidalzahlen, die aus dezentralen Quadraten aufgebaut sind, aufgefasst werden:

$$oct_n = pyr_n + pyr_{(n-1)} = \frac{1}{6}n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)+\frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2(n-1)+1)=$$
$$=\frac{1}{6}n\cdot(2n^2+2n+n+1+2n^2-2n-n+1)=\frac{1}{6}n\cdot(4n^2+2)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot(2n^3+n)$$

Vermutung: Die Oktaederzahlen entsprechen den “4-pyrz“-Zahlen.
Beweis:
$$\frac{1}{3}\cdot(2n^3+n)=\frac{4}{6}(n^2-1)\cdot n+n$$
$$\frac{2n^3+n}{3}=\frac{2n^3-2n+3n}{3} \qquad \text{w.A.}$$

2.3.2. Ikosaederzahlen “iko“



rekursive Berechnung:
Ein Ikosaeder hat 12 Ecken und 30 Kanten.
Die Folgenglieder sind daher:

$iko_1 = 1$
$iko_2 = 1+11 = 12$
$iko_3 = iko_2 + 11 + 25 = 12 + 36 = 48$
$iko_4 = iko_3 + 36 + 25+15*1 = 48 + 76 = 124$
...
$iko_n = iko_{(n-1)} + (15n^2 - 25n+12)/2$

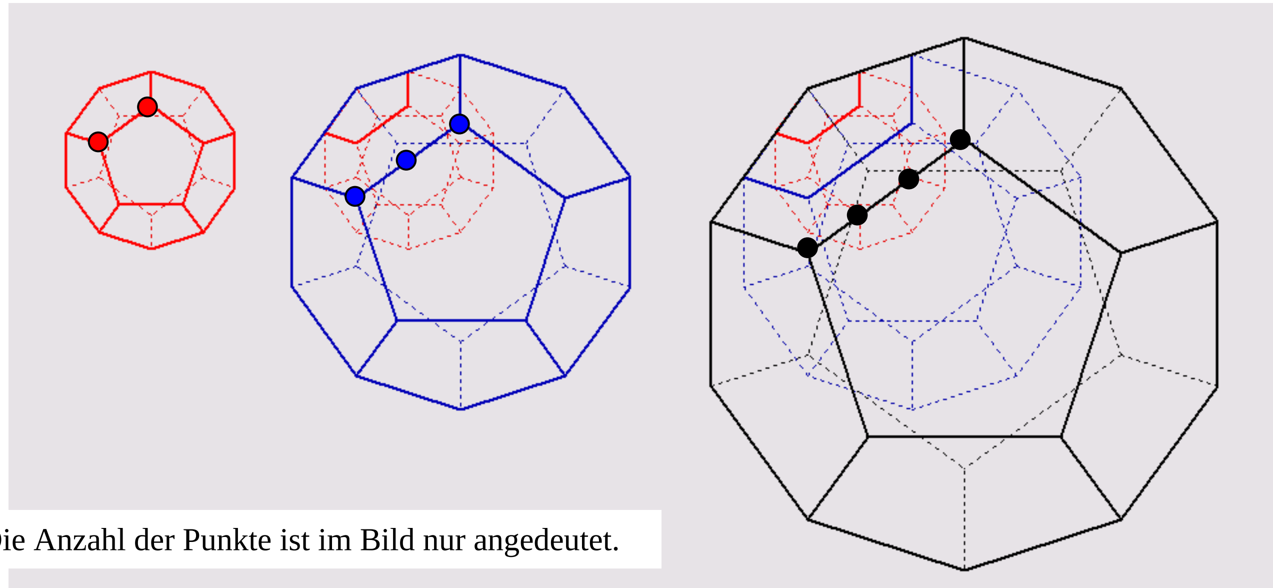
[16] vgl.: ebenda S. 59

explizite Berechnung:

$iko_1 = 1$
$iko_2 = 1+11$
$iko_3 = 1+11+ 11 + 25 = 1 + 2*11 + 25 = 48$
$iko_4 = 1+11+ 11 + 25 + 11 + 25 + 25 + 15 = 1 + 3*11 + 3*25 + 15 =124$
...

$$iko_n = \frac{1}{2}\left(5n^2 - 5n + 2\right)$$

2.3.3. Pentagondodekaederzahlen “dod“



Die Anzahl der Punkte ist im Bild nur angedeutet.

rekursive Berechnung:
Ein Pentagondodekaeder hat 20 Ecken und 30 Kanten.
Die Folgenglieder sind daher:

$dod_1 = 1$
$dod_2 = 1+19 =20$
$dod_3 = dod_2 + 19 + 45 = 20 + 64 = 84$
$dod_4 = dod_3 + 64 + 45 + 27 = 84 + 136 = 220$
...
$dod_n = dod_{(n-1)} + (27n^2-45n+10)/2$

explizite Berechnung:

$dod_1 = 1$
$dod_2 = 1+19$
$dod_3 = 1+19+ 19 + 45 = 1 + 2*19 +1*45 = 84$
$dod_4 = 1+19+ 19 + 45 + 19 + 45 + 45 + 27 = 1 + 3*19 + 3*45 + 27 = 220$
...

$$dod_n = \frac{9}{2}n^3 - \frac{9}{2}n^2 + n = \frac{1}{2}n(3n-1)(3n-2)$$

© mag. georg wengler

2.3.4. Zusammenfassung: Körperzahlen von Platonischen Körpern (dezentral)

Nummer Figur	1	2	3	4	n rekursive Formel	n explizite Formel
Tetraeder	1	4	10	20	$tet_n = tet_{(n-1)} + dre_n$	$tet_n = \frac{1}{6} n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$
Oktaeder	1	6	19	44	$oct_n = pyr_n + pyr_{(n-1)}$	$oct_n = 4 - pyrz_n = \frac{1}{3} \cdot (2n^3 + n)$
Würfel	1	8	27	64	$kub_n = kub_{(n-1)} + hexz_n = = 6 \cdot tet_{(n-1)} + n$	$kub_n = n^3$
Ikosaeder	1	12	48	124	$iko_n = iko_{n-1} + \frac{1}{2}(15n^2 - 25n + 12)$	$iko_n = \frac{1}{2} n(5n^2 - 5n + 2)$
Pentagon-dodekaeder	1	20	84	220	$dod_n = dod_{(n-1)} + \frac{1}{2}\left(27n^2 - 45n + 10\right)$	$dod_n = \frac{1}{2} n(3n-1)(3n-2)$

Ebenso könnte man natürlich die platonischen Körper zentral aufbauen. Rekursiv müssen immer die Anzahl der Ecken plus (n-2) mal die Anzahl der Kanten zur vorhergehenden Zahl dazugezählt werden. Aus diesem Ansatz kann dann wieder die explizite Form hergeleitet werden.

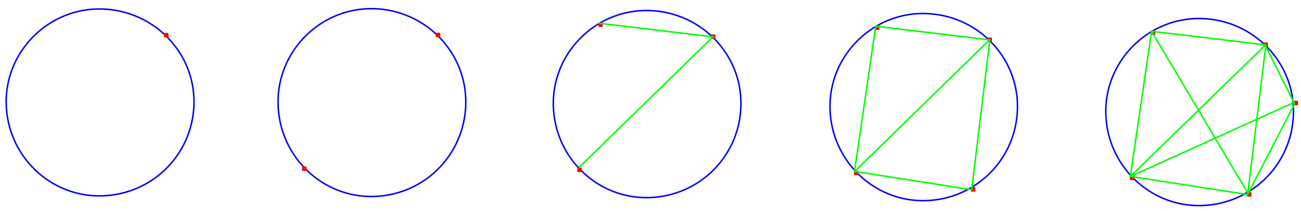
 © mag. georg wengler

3 Allgemeine Regeln von Folgen, die auf geometrischen Spielereien beruhen

Selbstverständlich würde sich dieses Spiel immer weiter spielen lassen – mit komplizierteren Körpern aber auch in höheren Dimensionen. Immer wieder stößt man dabei auf überraschende Regelmäßigkeiten und Formeln zur Berechnung von Folgen und Reihen.
So lässt sich z. B. auch zeigen, dass die Summe der ersten n Kubikzahlen gleich dem Quadrat der n-ten Dreieckszahl ist.

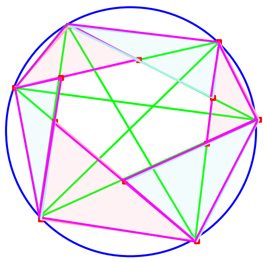
$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=dre_n^2=\frac{1}{4}n^2\cdot(n+1)^2$$ [17]

Trotzdem ist Vorsicht geboten. Man darf nicht immer aus scheinbarer Regelmäßigkeit einer Zahlenfolge auf die einfache Berechnung des nächsten Gliedes schließen. Ein Beispiel dafür ist das folgende:
Der n-te Kreis hat n Punkte auf seiner Umfangslinie. Diese Punkte werden auf alle möglichen Weisen miteinander verbunden. Die Punkte sind dabei so gewählt, dass sich höchstens zwei Verbindungslinien in einem Punkt schneiden. Wie viele Bereiche gibt es nun innerhalb des Kreises?[18]



$f_1=1$ $f_2=2$ $f_3=4$ $f_4=8$ $f_5=16$

Scheinbar werden die Bereiche immer wieder verdoppelt. Doch die Formel für das n-te Folgenglied: $f_n=2^{n-1}$ ist falsch. Wie man im folgenden Bild sieht, hat das 6. Folgenglied bzw. der 6. Kreis nur 31 Bereiche:



$f_6=6+3*6+7=31$

[17] vgl.: ebenda S. 67f.
[18] vgl.: ebenda S. 87-91

© mag. georg wengler

4 Bibliographie

Conway .H. u. Guy R., Zahlenzauber. Von natürlichen und imaginären und anderen Zahlen, Basel-Boston-Berlin 1997

http://de.wikipedia.org/wiki/Dreieckszahl vom 06.06.2006

http://de.wikipedia.org/wiki/Vollkommene_Zahl#Berechnung_von_vollkommenen_Zahlen vom 06.06.2006

http://de.wikipedia.org/wiki/Zusammengesetzte_Zahl vom 10.06.2006

http://www.mathematische-basteleien.de/dreieckszahlen.htm vom 06.06.2006

http://www.phzh.ch/statisch/taxigeometrie/teil2.html vom 06.06.2006

http://zahlwort.blogger.de/stories/267742 vom 10.06.2006