

Euler-Produkt-Formel für die Riemann-Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Beweis:

Man muss nach weisen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

und

$$\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \dots$$

gleich sind.

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots$$

subtrahieren von $\zeta(s)$ liefert:

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \dots$$

d.h. es fallen alle Brüche mit Faktor 2 weg.

Analog:

$$\frac{1}{3^s} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \dots$$

wieder subtrahieren von $\zeta(s)$:

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \dots$$

d.h. es fallen auch alle Brüche mit Faktor 3 weg.

Dies führt man nun unendlich oft durch und man erhält:

$$\dots \left(1 - \frac{1}{11^s}\right) \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1$$

$$\Rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \left(1 - \frac{1}{11^s}\right) \dots} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \dots \quad \blacksquare$$