Euler (1707-1783):
Zusammenhang zwischen Kreiszahl π und den Primzahlen

Satz:

$$\pi = 4 \cdot \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \cdot \cdots$$

Beweis:

$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow \text{atan}(1) = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots = A$

wegen Taylorreihe von $atan(x) = x - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} \pm \cdots$ für x = 1.

Nun B= A+A/3 => alle Brüche, deren Nenner Vielfache von 3 sind, fallen weg.

Nun C=B-B/5 => alle Brüche, deren Nenner Vielfache von 5 sind, fallen weg.

Nun D=C+C/7 => alle Brüche, deren Nenner Vielfache von 7 sind, fallen weg.

usw.

Geht man bis unendlich, fallen alle Brüche weg und 1 bleibt übrig:

$A \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11}\right) \cdot \cdots = 1,$

wobei der Faktor $\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ lautet, wenn p=4k-1, sonst $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Da $A = \frac{\pi}{4} \rightarrow \pi = 4 \cdot \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \cdot \cdots$

Damit besteht ein Zusammenhang zwischen der Kreiszahl π und den Primzahlen.

q.e.d.