

Aufgabenstellung:

Gegeben ist eine Stichprobe aus einer stetigen Grundgesamtheit, d.h. in der Stichprobe treten mehrere oder unüberschaubar viele Merkmalwerte auf.
Erwartungswert μ und Standardabweichung σ sind bekannt. Die Verteilung soll geprüft werden.

Hypothese und Gegenhypothese:

Wir gehen von der Nullhypothese H_0: $F(x) = F_0(x)$ aus. Damit wird behauptet, dass die Stichprobe aus einer F_0-verteilten Grundgesamtheit sei.
Die Gegenhypothese lautet hiermit: H1: $F(x) \neq F_0(x)$

Signifikanzniveau und Stichprobe:

Ein Signifikanzniveau α muss vorgegeben sein. Damit wird die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1.Art (H_0 wird abgelehnt, obwohl i.W. zutreffend) gesteuert. Eine Stichprobe mit n (Stichprobenumfang) Stichprobenwerten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wird gezogen. Dazu die absoluten Häufigkeiten $k_1, k_2, \ldots k_n$.

Prüfgröße:

Man geht nun von einer Häufigkeitstabelle der Stichprobe aus, die angibt wie viele Werte der Stichprobe in ein jeweilig vorgegebenes Intervall fallen.
Dann bestimmt man mit der angenommenen Verteilung (NV) die theoretischen Wahrscheinlichkeiten und multipliziert sie mit sie jeweils mit der dem Stichprobenumfang n. Es entstehen die Werte $e_1, e_2, \ldots e_n$.
Wenn sich für eine oder mehrere Klassen eine theoretische Anzahl von weniger als 5 ergibt, müssen Klassen zusammengefaßt und die Rechnung neu durchgeführt werden.
Wenn die vermutete Verteilung zutreffen würde, dann müßten sich für jedes Intervall ungefähr gleiche Werte für die tatsächliche (k_i) und die theoretische Anzahl (e_i) ergeben. Bei allfälligen Unterschieden in den Anzahlen muss anstelle einer ev. gefühlsmäßigen Entscheidung gegen die Hypothese die objektive Rechnung nach den Regeln der mathematischen Statistik erfolgen.
Dazu wird die Prüfgröße $z = X^2$ bestimmt:

$$z = X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(k_i - e_i)^2}{e_i} \qquad (1)$$

Quantile für die Entscheidung mit dem Ablehnungsbereich:

Entsprechend der gegebenen Fragestellung müssen nun verschiedene Quantile der X^2-Verteilung ermittelt werden, um den jeweiligen Ablehnungsbereich zu erkennen:
Freiheitsgrad f = m – 1 (Anzahl der Klassen minus 1)
Quantil $z_{1-\alpha} = X^{2\,-1}(f, 1-\alpha)$ (q_R = *InversChiQuadrat[f, 1-α]* in GGB)

Entscheidung mit Ablehnungbereich:

Fällt die Prüfgröße X^2 in den Ablehnungsbereich, dann ist die Nullhypothese H_0 zugunsten der betrachteten Gegenhypothese H_1 abzulehnen:
Die Zufallsstichprobe spricht bei dieser Gegenhypothese **signifikant** gegen die Nullhypothese.
Andernfalls gibt es keinen Grund zur Ablehnung der Nullhypothese:
Die Zufallsstichprobe spricht dann **nicht signifikant** gegen die Nullhypothese.

Berechnung der Überschreitungswahrscheinlichkeit (Irrtumswahrscheinlichkeit):

Völlig gleichberechtigt für die obigen Schritte zur statistischen Entscheidung ist die Methode der Überschreitungswahrscheinlichkeit. Sie unterscheidet sich nur in der Vorgehensweise von der Entscheidung mittels Ablehnungsbereich.
Zunächst braucht man die Überschreitungswahrscheinlichkeit:
$p_1 = 1 - X^2(f, z)$ (p_1 = *1-ChiQuadrat[f,z]* in GGB)

Entscheidung mit Überschreitungswahrscheinlichkeit:

Ist die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_1 kleiner als das Signifikanzniveau α, so kann mit gutem Grund die Nullhypothese abgelehnt werden.
Die Stichprobe spricht in diesem Fall **signifikant** gegen H_0.
Ist dagegen die Überschreitungswahrscheinlichkeit p_1 nicht kleiner als das Signifikanzniveau α, dann gibt es keinen Grund zur Ablehnung von H_0.
<u>Kurz</u>:
$z > 0$ und $p_1 < \alpha$ => Ablehnung von H_0
$z \leq 0$ oder $p_1 \geq \alpha$ => Akzeptanz von H_0

Statt Überschreitungswahrscheinlichkeit spricht man auch von **Irrtumswahrscheinlichkeit**, weil man sich mit dieser Wahrscheinlich irrt, wenn man H_0 ablehnt.
Ist also diese Irrtumswahrscheinlichkeit sehr klein, dann ist das Risiko 1.Art (einen Fehler 1.Art zu begehen) eher gering.

siehe Beispiele Test-Verteilung(parameter-bekannt).ggb