Platonische und Archimedische Körper: EckenCode

Es gilt:
E = Anzahl der Ecken eines Körpers
F = Anzahl der Flächen eines Körpers
K = Anzahl der Kanten eines Körpers

Polyedersatz von Euler: e+f = k+2 (1)

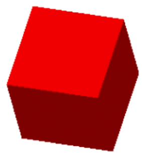
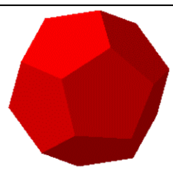
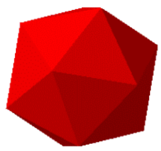
Weiters gilt, wenn
n = Anzahl der Ecken eines Vielecks und
m = Zahl der Vielecke (einer Sorte), die an einer Ecke zusammenkommen, dann

$$K = \frac{n \cdot F}{2} \qquad (2)$$

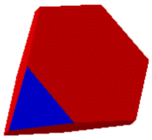
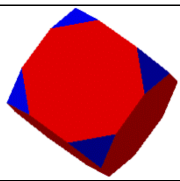
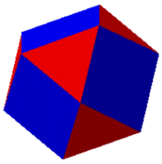
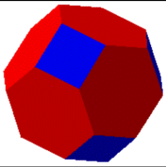
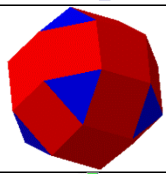
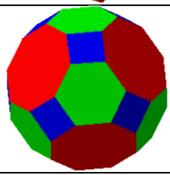
$$E = \frac{n \cdot F}{m} \qquad (3)$$

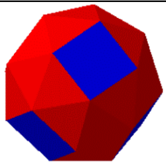
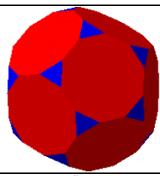
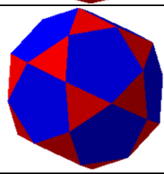
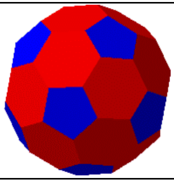
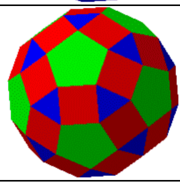
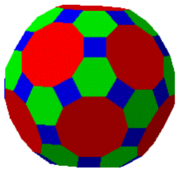
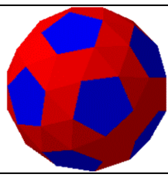
Ein Körper kann nun mit dem sog. Ecken-Code eindeutig identifiziert werden.
Wie kann man aus dem Ecken-Code die Zahl der Ecken, Flächen und Kanten berechnen?

Platonisch:

Körper	Ecken-Code	Bild
Tetraeder	<3,3,3>	
Hexaeder	<4,4,4>	
Oktaeder	<3,3,3,3>	
Dodekaeder	<5,5,5>	
Ikosaeder	<3,3,3,3,3>	

Archimedisch:

Tetraederstumpf	<3,6,6>	
Hexaederstumpf	<3,8,8>	
Kuboktaeder	<3,4,3,4>	
Oktaederstumpf	<4,6,6>	
Rhombenkuboktaeder	<3,4,4,4>	
Kuboktaederstumpf	<4,6,8>	

Cubus simus	<3,3,3,3,4>	
Dodekaederstumpf	<3,10,10>	
Ikosidodekaeder	<3,5,3,5>	
Ikosaederstumpf	<5,6,6>	
Rhombenikosidodekaeder	<3,5,4,5>	
Ikosidodekaederstumpf	<4,6,10>	
Dodekaeder simum	<3,3,3,3,5>	

Aus diesem „Ecken-Code“ kann man sich mit Hilfe von (1)(2)(3) nun E, K und F ausrechnen:

Aus dem Code wird zunächst ermittelt:
n_1 = Eckenanzahl der ersten Vielecksart, m_1 = die Anzahl dieser Vielecksart
n_2 = Eckenanzahl der zweiten Vielecksart, m_2 = die Anzahl dieser Vielecksart etc.

Sei $f(n_1)$ die Anzahl der ersten Vielecksart => $k(n_1)=\frac{n_1 \cdot f(n_1)}{2}$, Zahl der Kanten dieser Vielecksart => $e(n_1)=\frac{n_1 \cdot f(n_1)}{m_1}$, Zahl der gesamten Flächen (E).

Weiters ist $f(n_2)=\frac{n_1 \cdot f(n_1)}{m_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$ die Anzahl der zweiten Vielecksart und

$k(n_2)=\frac{n_2 \cdot f(n_2)}{2}=\frac{n_1 \cdot f(n_1)}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1}$ die Zahl der Kanten dieser Vielecksart

Dies gilt für die weiteren Vielecksarten in analoger Weise
=> K = $k(n_1)+k(n_2)+$ …die gesamte Kantenzahl

Setzt man diese Ergebnisse in den Eulerschen Polyedersatz ein, dann kann man sich $f(n_1)$ ausrechnen.

E + F = K + 2
Gleichung (4)

$$\frac{n_1 \cdot f(n_1)}{m_1} + \left(f(n_1) + \frac{n_1 \cdot f(n_1)}{m_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} + \frac{n_1 \cdot f(n_1)}{m_1} \cdot \frac{m_3}{n_3} + \ldots \right) = \left(\frac{n_1 \cdot f(n_1)}{2} + \frac{n_1 \cdot f(n_1)}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1} + \ldots \right) + 2$$

=>$f(n_1)$

Hat man $f(n_1)$, so kann man sich auch $f(n_2)$, $f(n_3)$ etc. ausrechnen. Diese stellen die Anzahl der einzelnen Vielecksarten dar und => F = $f(n_1)+f(n_2)+\ldots$die gesamte Flächenzahl.

Beispiel 1: Fußball = Ikosaederstumpf   Code = <5,6,6>

Aus dem Code lesen wir ab:
$n_1 = 5$, $m_1 = 1$ (Fünfeck kommt einmal vor)
$n_2 = 6$, $m_2 = 2$ (Sechseck kommt zweimal vor)
Gleichung (4) lautet dann:

$$\frac{5f(n_1)}{1} + \left(f(n_1) + \frac{5f(n_1)}{1} \cdot \frac{2}{6} \right) = \left(\frac{5f(n_1)}{2} + \frac{5f(n_1)}{2} \cdot \frac{2}{1} \right) + 2$$ => $f(n_1) = 12$ => $f(n_2) = 20$

d.h. 12 Fünfecke und 20 Sechsecke, also 32 Flächen gesamt.
E = 5*12 = 60 und K = 30+60 = 90

Beispiel 2: Dodekaeder   Code = <5,5,5>
$n_1 = 5$, $m_1 = 3$ (Fünfeck dreimal)
Gleichung (4) lautet:

$$\frac{5 \cdot f(n_1)}{3} + f(n_1) = \frac{5 \cdot f(n_1)}{2} + 2$$ => $f(n_1) = 12$, d.h. 12 Fünfecke => E = 5*12/3 = 20
K = 5*12/2 = 30

Für eine allgemeine Berechnung siehe AllREgPolyederEC.dfw