Platonische und Archimedische Körper

Der Ecken-Code

Mag. Georg Wengler

Platonische und Archimedische Körper

Für alle Polyeder gilt der EULERsche Polyedersatz

$$E + F = K + 2$$

E … Anzahl der Ecken
F … Anzahl der Flächen
K … Anzahl der Kanten

Platonische und Archimedische Körper

Weiters gilt:

$$K = n.F/2$$

$$E = n.F/m$$

n … Zahl der Ecken eines Vielecks
m … Zahl der Vielecke, die an einer Ecke zusammenkommen

Platonische und Archimedische Körper

Ecken-Code:

z.B. < 4,6,8 >

d.h. an einer Ecke stoßen
- ein regelmäßiges 4-Eck,
- ein regelmäßiges 6-Eck und
- ein regelmäßiges 8-Eck zusammen

Platonische Körper

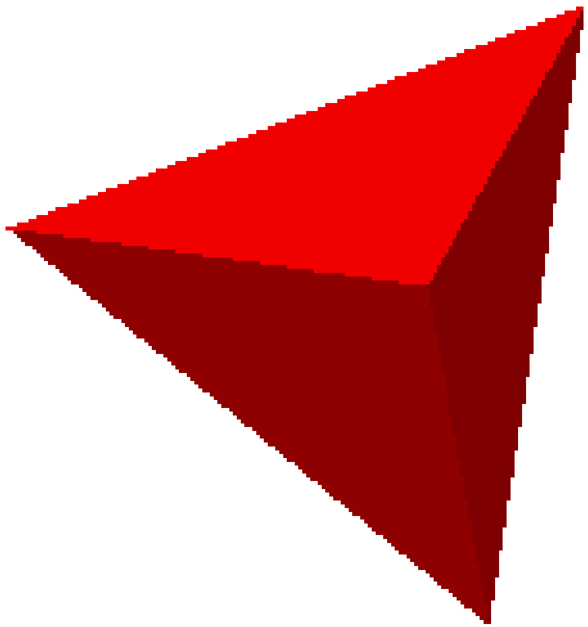
Tetraeder

< 3,3,3 >

F = 4

E = 4

K = 6



Mag. Georg Wengler

Platonische Körper

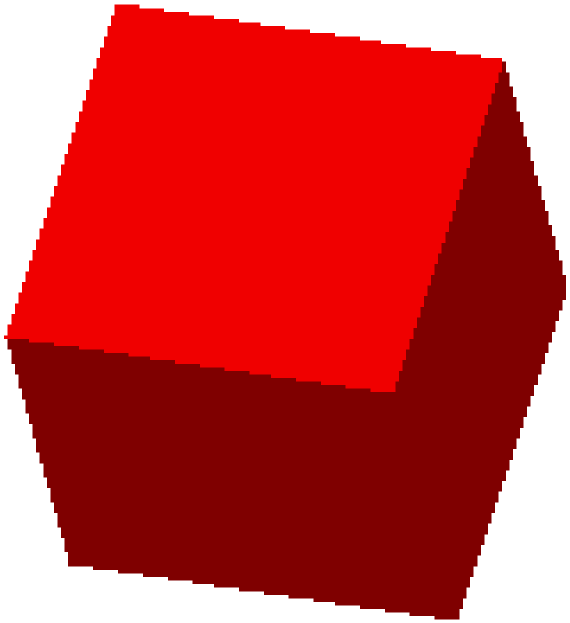
Hexaeder

< 4,4,4 >

F = 6

E = 8

K = 12



Platonische Körper

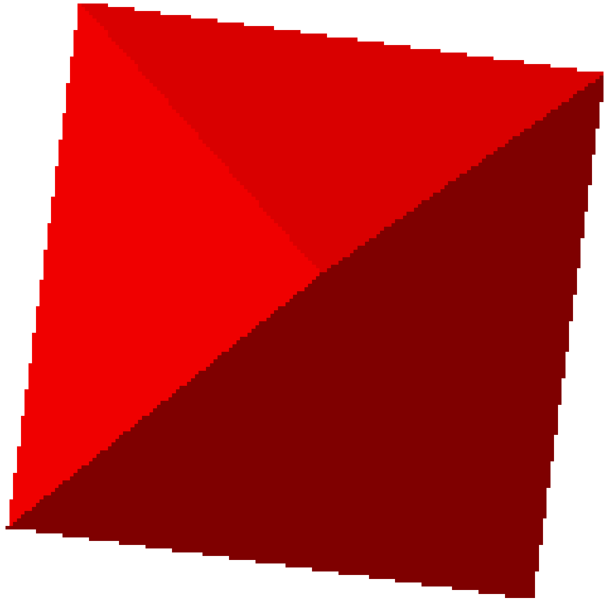
Oktaeder

< 3,3,3,3 >

F = 8

E = 6

K = 12



Platonische Körper

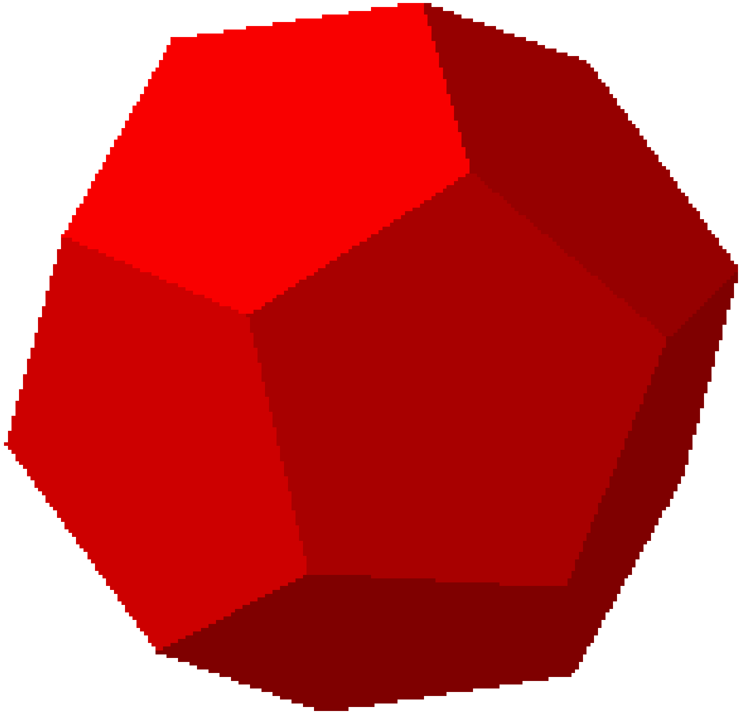
Dodekaeder

< 5,5,5 >

F = 12

E = 20

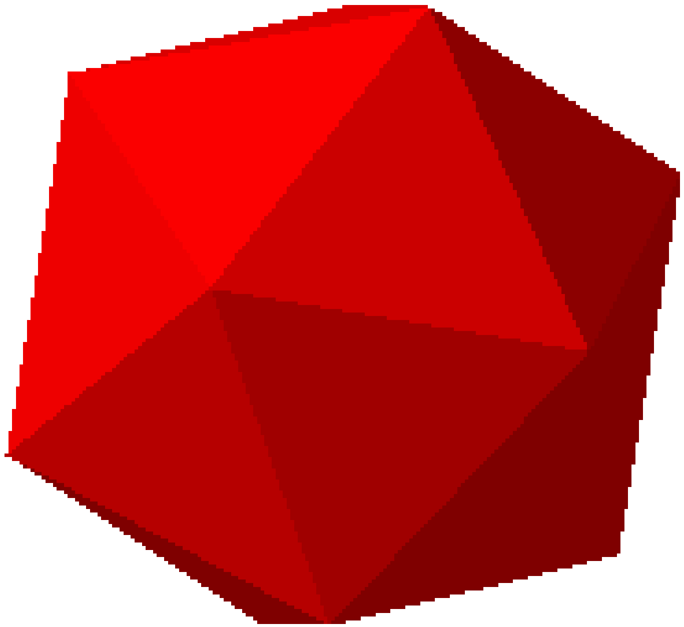
K = 30



Platonische Körper

Ikosaeder

⟨ 3,3,3,3,3 ⟩



F = 20

E = 12

K = 30

Archimedische Körper

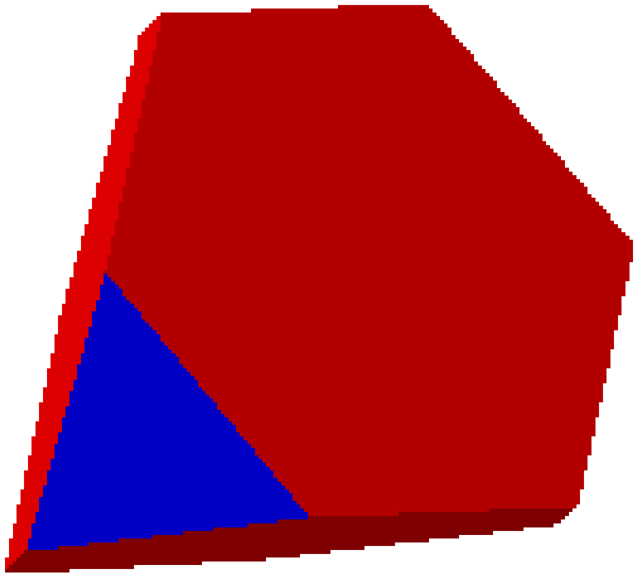
Tetraederstumpf

< 3,6,6 >

F = 8

E = 12

K = 18



Archimedische Körper

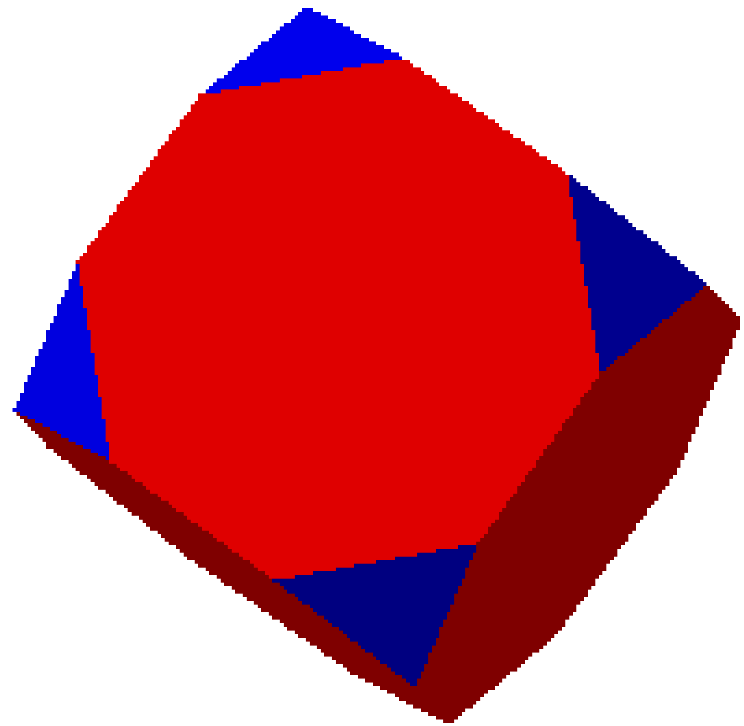
Hexaederstumpf

< 3,8,8 >

F = 14

E = 24

K = 36



Archimedische Körper

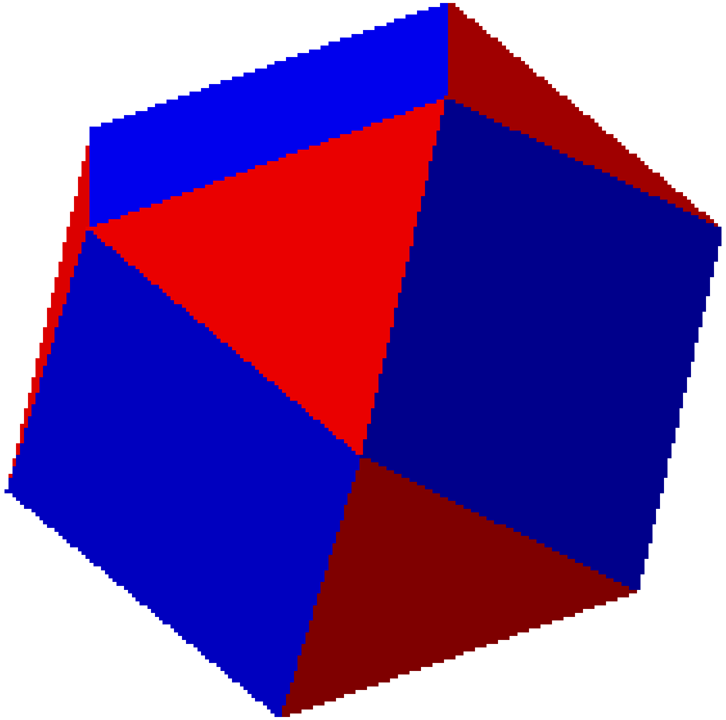
Kuboktaeder

< 3,4,3,4 >

F = 14

E = 12

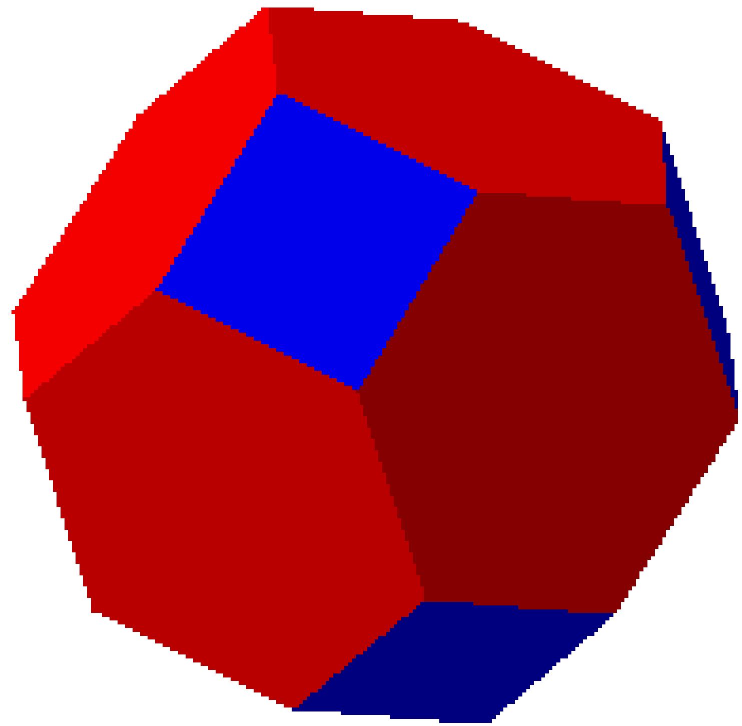
K = 24



Archimedische Körper

Oktaederstumpf

< 4,6,6 >



F = 14

E = 24

K = 36

Archimedische Körper

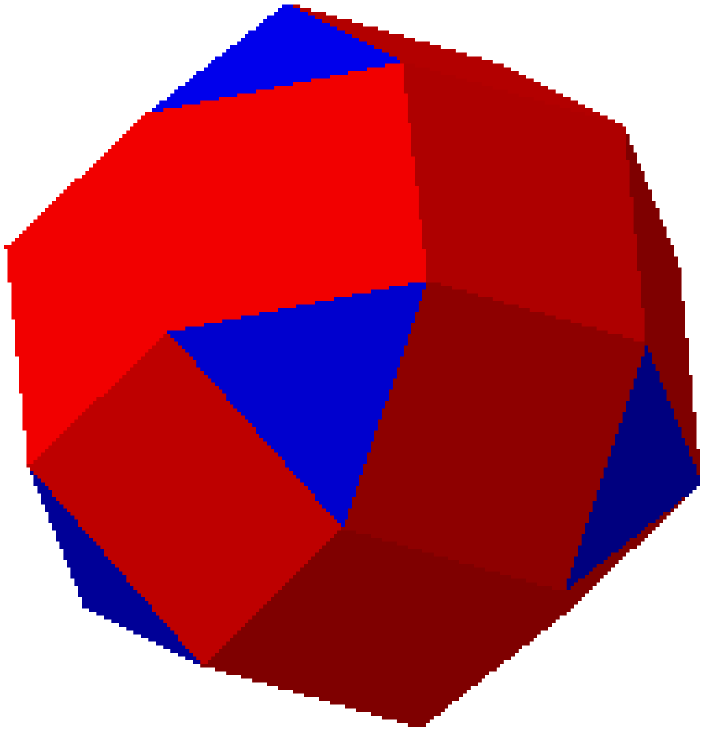
Rhombenkuboktaeder

< 3,4,4,4 >

F = 26

E = 24

K = 48



Archimedische Körper

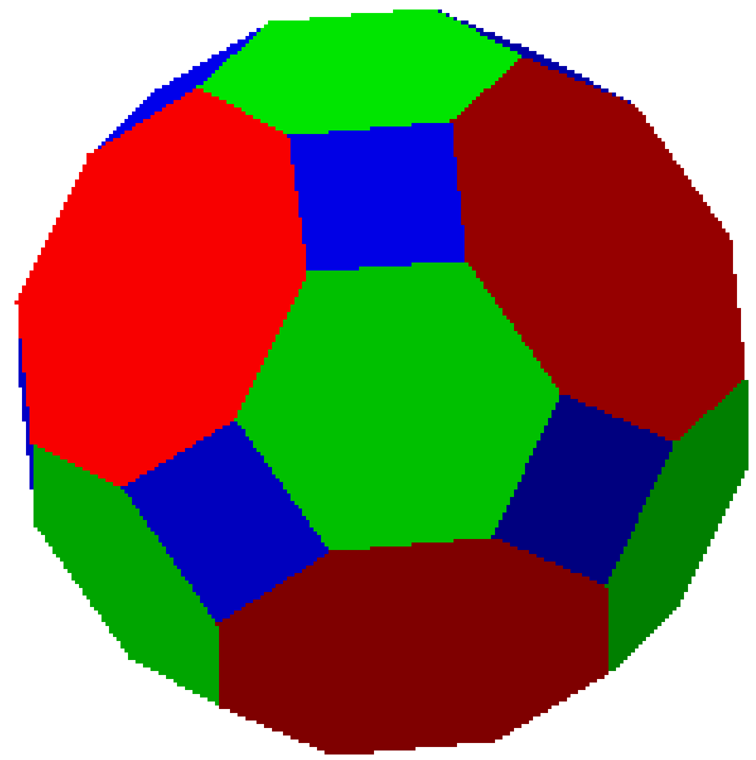
Kuboktaederstumpf

< 4,6,8 >

F = 26

E = 48

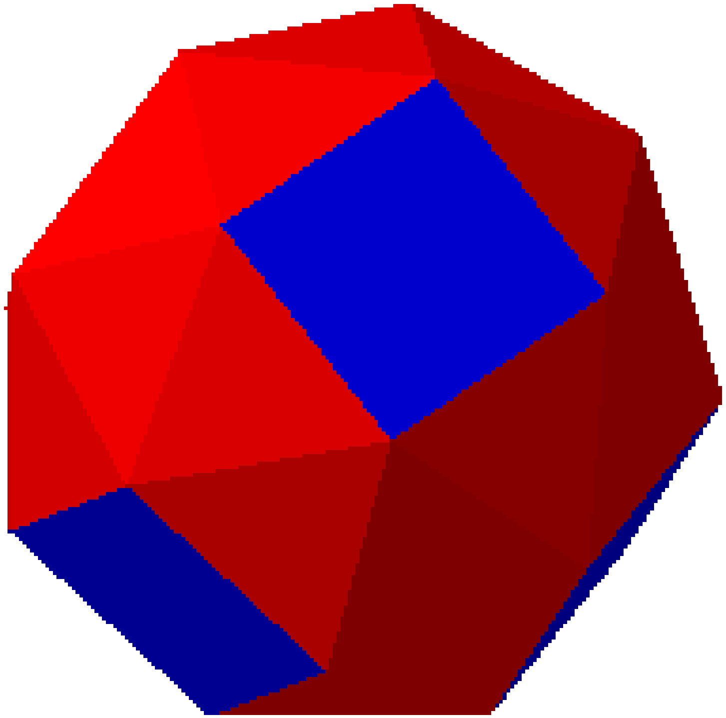
K = 72



Archimedische Körper

Cubus simus

< 3,3,3,3,4 >



F = 38

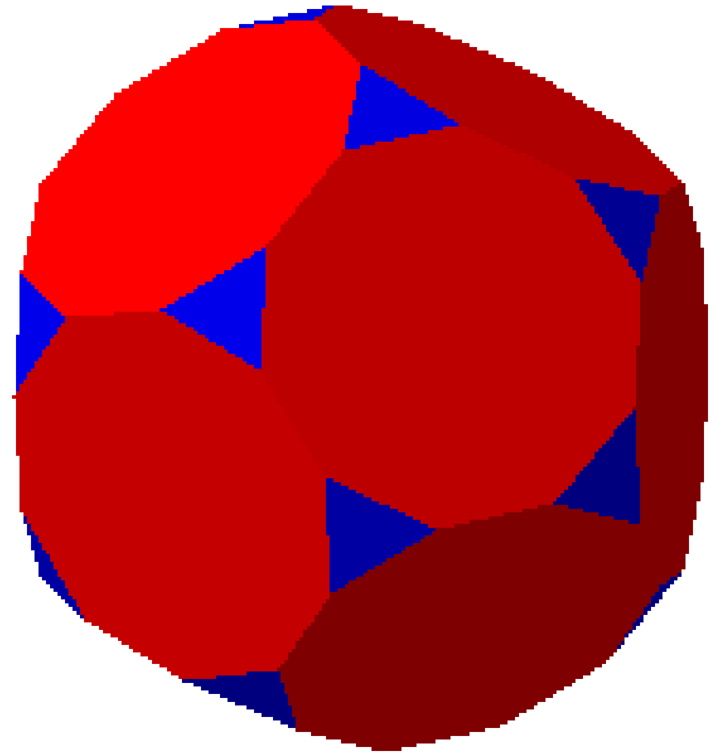
E = 24

K = 60

Archimedische Körper

Dodekaederstumpf

< 3,10,10 >



F = 32

E = 60

K = 90

Archimedische Körper

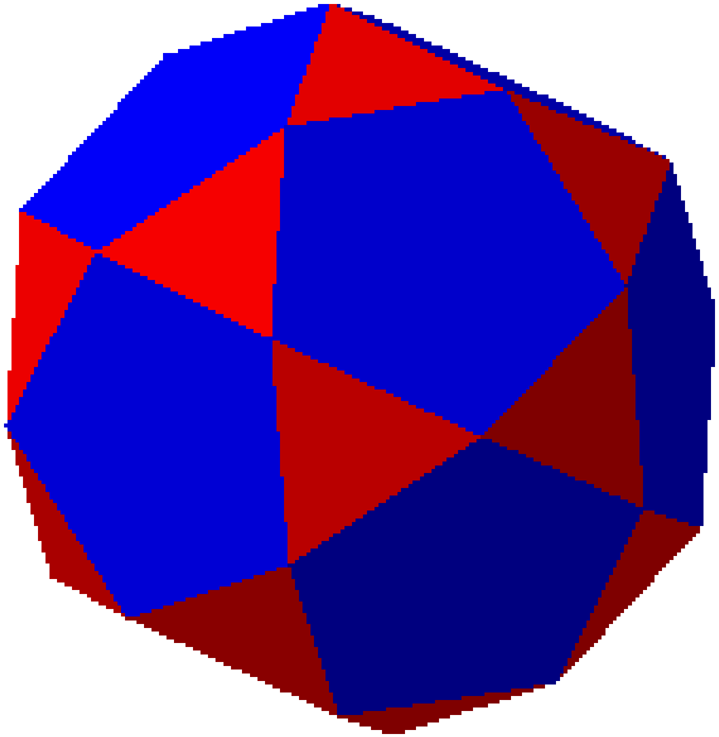
Ikosidodekaeder

< 3,5,3,5 >

F = 32

E = 30

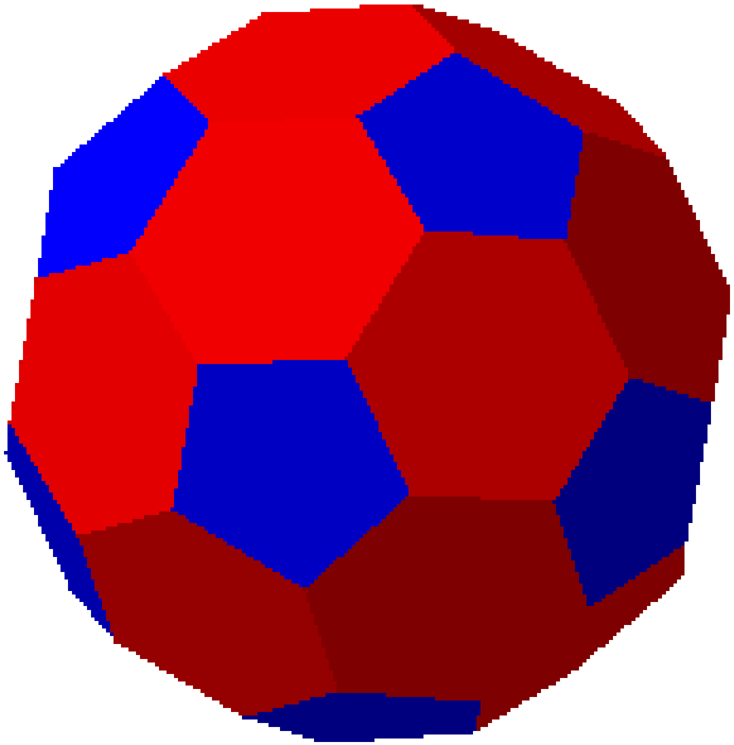
K = 60



Archimedische Körper

„Fußball“

Ikosaederstumpf



< 5,6,6 >

F = 32

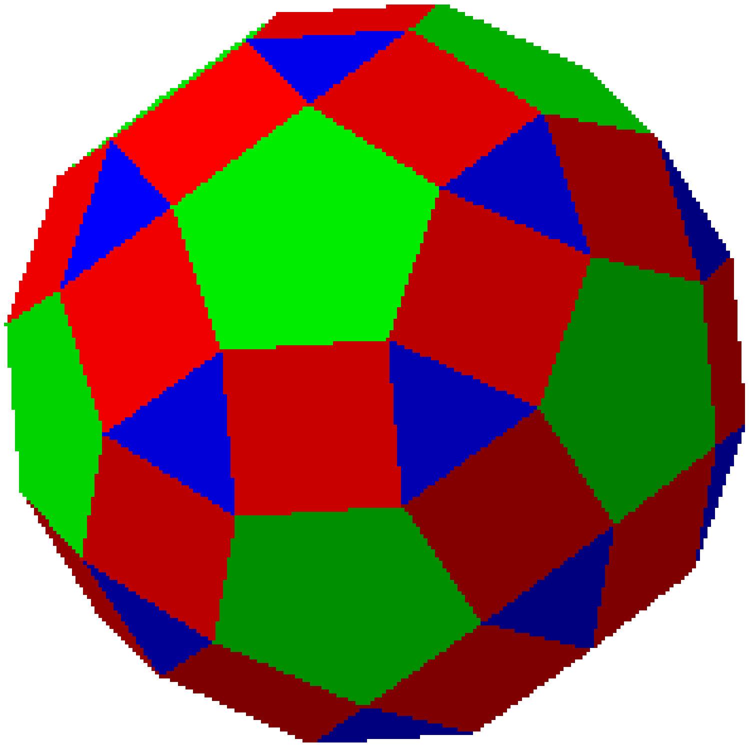
E = 60

K = 90

Archimedische Körper

Rhombenikosidodekaeder

< 3,4,5,4 >



F = 62

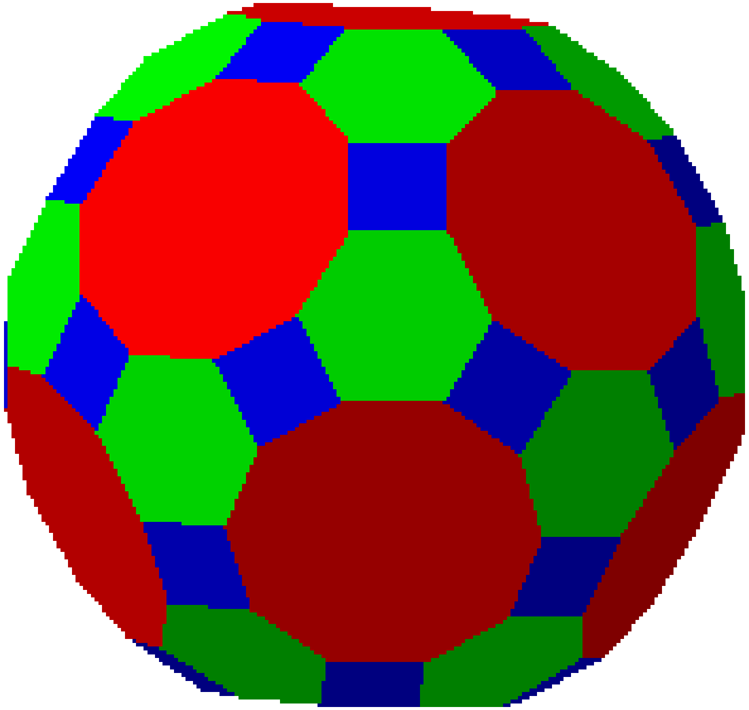
E = 60

K = 120

Archimedische Körper

Ikosidodekaederstumpf

< 4,6,10 >



F = 62

E = 120

K = 180

Archimedische Körper

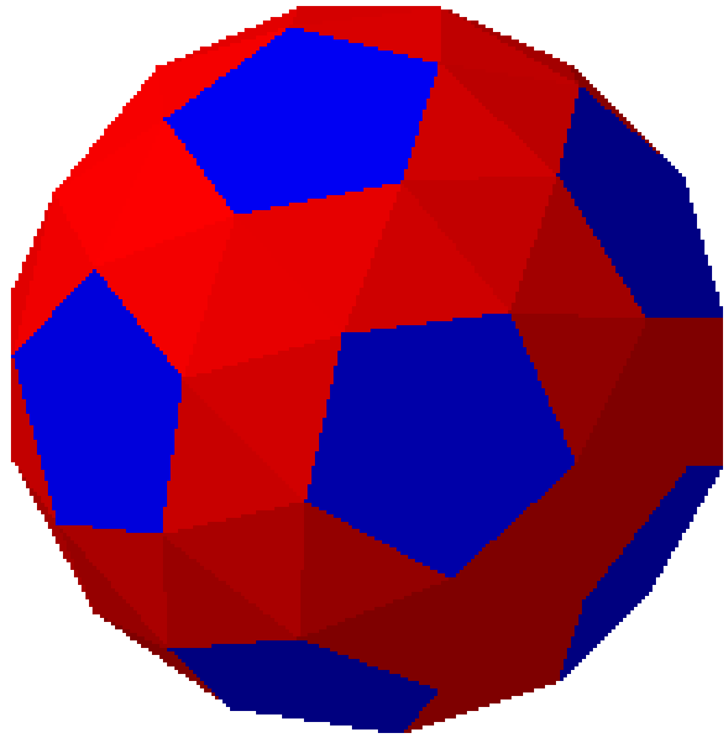
Dodekaeder simum

< 3,3,3,3,5 >

F = 92

E = 60

K = 150



Wie kann man aus dem
Ecken-Code

F, **E** und **K** berechnen?

Platonische und Archimedische Körper

Aus dem Ecken-Code kann man sich zunächst die Werte

- n … Anzahl der Ecken eines Vielecks (n-Eck) und

- m … Anzahl der Vielecke

an einer Ecke herausfiltern:

Beispiel: „Fußball" < 5,6,6 >

$\mathbf{n_1 = 5, m_1 = 1}$ (5-Eck kommt 1-mal vor)

$\mathbf{n_2 = 6, m_2 = 2}$ (6-Eck kommt 2-mal vor)

Platonische und Archimedische Körper

$$K_1 = \frac{n_1 \cdot F_1}{2}, K_2 = \frac{n_2 \cdot F_2}{2} \Rightarrow K = K_1 + K_2$$

$$E = \frac{n_1 \cdot F_1}{m_1} = \frac{n_2 \cdot F_2}{m_2} \Rightarrow F_2 = \frac{n_1 \cdot F_1}{m_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$$

$$F = F_1 + F_2 = F_1 + \frac{n_1 \cdot F_1}{m_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$$

Platonische und Archimedische Körper

Einsetzen in den EULERschen Polyedersatz:

E + F = K + 2

$$\frac{n_1 \cdot F_1}{m_1} + \left(F_1 + \frac{n_1 \cdot F_1}{m_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \right) = \left(\frac{n_1 \cdot F_1}{2} + \frac{n_1 \cdot F_1}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1} \right) + 2$$

Daraus kann man sich nun F1 ausrechnen: in unserem Beispiel

$$\frac{5 \cdot F_1}{1} + \left(F_1 + \frac{5 \cdot F_1}{1} \cdot \frac{2}{6} \right) = \left(\frac{5 \cdot F_1}{2} + \frac{5 \cdot F_1}{2} \cdot \frac{2}{1} \right) + 2 \Rightarrow F_1 = 12, F_2 = 20$$

Platonische und Archimedische Körper

$$F = F_1 + F_2 = 12 + 20 = 32$$

$$E = \frac{5 \cdot 12}{1} = 60$$

$$K_1 = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30, K_2 = \frac{6 \cdot 20}{2} = 60 \Rightarrow K = 90$$

Der „Fußball“ hat **32 Flächen**, **60 Ecken** und **90 Kanten**

Platonische und Archimedische Körper

Überprüfe diesen Algorithmus
für die anderen Körper!

Ciao

siehe AllgRegPolyederEC